

F1913

L: 031935

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

SERIA
ȘTIINȚELE NATURII
MATEMATICĂ-FIZICĂ

34

ANUL XI — 1962

ANALELE
UNIVERSITĂȚII
BUCUREȘTI



SERIA
ȘTIINȚELE NATURII
MATEMATICĂ-FIZICĂ

34

ANUL XI — 1962

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil : Acad. Prof. Dr. *Gheorghe Mihoc*.
Redactor responsabil adjunct : Acad. Prof. Dr. *M. Filipescu*.

MEMBRII

Acad. Prof. Dr. *H. Hulubei*; Acad. Prof. Dr. *I. G. Murgulescu*; Acad. Prof. Dr. *E. Angelescu*;
Acad. Prof. Dr. *N. Teodorescu*; Acad. Prof. Dr. *N. Săldăgeanu*; Prof. Dr. *V. Mihu*; Prof.
Dr. *P. Spacu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *Gr. Popa*; Prof. Dr.
Al. V. Grossu; Prof. Dr. *Dan Giușcă*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr.
N. Botnariuc; Prof. Dr. *N. Șanta*; Prof. Dr. *I. Tarnavski*; Prof. Dr. *Gr. Răileanu*; Conf. *St.*
Gheorghiuță, candidat în științe; Conf. *M. Rosemberg*, candidat în științe; Conf. *Gr. Posea*,
candidat în științe; Prof. *C. Herbst*; Prof. *M. Iancu*, candidat în științe.

REDACȚIA
UNIVERSITATEA BUCUREȘTI

B-dul 6 Martie nr. 64
Telefon : 14.27.92

SUMAR

MATEMATICĂ

	Pag.
O. ONICESCU : Sisteme cu dublă structură	9
GH. MIHOC : Teoremă ergodică pentru lanțurile cu legături complete multiple	17
N. MIHĂILEANU : Începuturile matematice în țara noastră	29
N. MIHĂILEANU : Interpretarea în spațiul euclidian cu o dimensiune în plus, a geometriei lui Lobacevski	59
I. D. TEODORESCU : Metoda congruențelor pseudoortogonale în teoria relativității, I	65
D. SMARANDA : Asupra geodezicelor spațiilor V_{2p} proiectiv-complexe cu curbura negativă	93
I. DRĂGHICI : Asupra similitudinilor din spațiul euclidian cu trei dimensiuni	97
ȘT. D. TEODORESCU : Cazurile de conservare a unghiurilor proiecție	111
C. A. CAZACU : Suprafețe riemanniene parțial regulat exhaustibile	125
N. DINCULEANU : Despre seminormele N_p	155
LIA ARAMĂ : O evaluare a restului în aproximarea funcțiilor prin polinoamele lui S. N. Bernstein	165
S. MARCUS : Caracterizări locale și caracterizări globale ale funcțiilor integrale și ale funcțiilor integrale	179
I. COLOJOARĂ : Reprezentarea algebrei $L_{w*}(H, I)$ într-o algebră de operatori dintr-un spațiu Hilbert	185
A. SOLIAN : Semi-topologia grupurilor de transformări	195
N. CRISTESCU : Condiții la limită în mișcarea firelor extensibile	205
P. P. TEODORESCU : Asupra utilizării funcțiilor de tensiune în problema plană a teoriei elasticității în coordonate oblice	217
N. ȘANDRU : Asupra acțiunii sarcinilor concentrate în interiorul unor domenii elastice plane infinite	229
E. UNGUREANU : Aplicarea unei metode semiinverse la mișcările cu suprafață liberă din hidrodinamica subterană	243
I. I. CRISTEA : Considerarea suprafețelor de vîrtej în studiul mișcărilor rotaționale permanente tridimensionale ale fluidelor perfecte barotrope	253

FIZICĂ

T. GHEORGHIU, A. NICOLAU, N. RĂDULESCU și E. POPESCU : Emisia uneia termoionică a sulfuri de nichel (NiS) în funcție de temperatură, presiune și potențial accelerator	267
I. LICEA : Despre sarcina spațială la suprafața semiconductoarelor	277
I. LICEA : Despre determinarea dependenței de temperatură a mobilității purtătorilor de sarcină în semiconductori	285
G. G. BRĂTESCU : Contribuție la studiul aberației de sfericitate a dioptrului sferic	291

	<u>Pag.</u>
G. PETRESCU și G. PURCARU: Asupra stării tensionale în focarul cutremurului din 13 decembrie 1957 (Iran)	299
G. PETRESCU, C. RADU, G. PURCARU: Volumul cutremurelor intermediiare din Vrancea	305
A. NICOLAU, N. RĂDULESCU, M. COJOCARU și V. RUXANDRA: Variația cu presiunea a coeficientului de schimb de căldură între un corp solid încălzit și aer	313
A. NICOLAU, M. GEORGESCU, M. CAZAN CORBASCA și ȘT. BUCUR: Contribuții la studiul descărcărilor în gaze. Potențialul de aprindere al amestecurilor binare de gaze biatomice	321
AL. GRIGORIU, M. PETRESCU, H. IVANOVICI și TR. OLARU: Fondul ultraacustic terestru ca factor biofizic primar. Originea periodicității nictemerale a echilibrului coloidal.	333
TR. CREȚU și R. MIHAI: Asupra caracteristicilor unor contori alfa cu științei	343

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

	Стр.
О. ОНИЧЕСКУ: Системы с двойной структурой	15
Г. МИХОК: Эргодическая теорема применяемая к цепям с глными и многочисленными связями.	27
Н. МИХЭЙЛЯНУ: Начала математической науки в нашей стране	57
Н. МИХЭЙЛЯНУ: Интерпретация геометрии Лобачевского в эв- клидовом пространстве большого числа измерений	63
И. Д. ТЕОДОРЕСКУ: Метод псевдо-ортогональных конгруенций в теории относительности, I.	92
Д. СМАРАНДА: О геодезических проективно-комплексных про- странствах V_{2p} с отрицательной кривизной.	95
И. ДРЭГИЧ: К вопросу о подобиях в эвклидовском трёхмерном пространстве	110
СТ. Д. ТЕОДОРЕСКУ: Консервативные случаи проекций углов .	123
К. А. КАЗАКУ: Частично регулярно исчерпываемые римановы поверхности	151
Н. ДИНКУЛЯНУ: О полунормах N_p	167
Л. АРАМЕ: Исчисление остатка при приближённом счёте функций многочленами С. Н. Бернштейна	177
С. МАРКУС: Местные и общие характеристики интегрируемых и ин- тегральных функций	183
И. КОЛОЖОАРЭ: Представление алгебры $L_{w*}(H, I)$ в алгебре операторов Гильбертова пространства	194
А. СОЛИАН: Полутопология групп преобразований	202
Н. КРИСТЕСКУ: Граничные условия в движении удлиняющихся нитей.	215
П. П. ТЕОДОРЕСКУ: Об употреблении функций напряжения в плос- кой задаче теории упругости в косоугольных координатах	227
Н. ШАНДРУ: О действии концентрированных нагрузок внутри плоских упругих бесконечных областей.	242
Е. УНГУРЯНУ: Применение полуобратного метода к движениям со свободной поверхностью подземной гидродинамики	251
И. И. КРИСТЯ: Рассмотрение вихревых поверхностей при изуче- нии трёхмерных непрерывных вращательных движений баро- тропических совершенных жидкостей.	265

ФИЗИКА

Т. ГЕОРГИУ, А. НИКОЛАУ, Н. РЭДУЛЕСКУ и Е. ПОПЕСКУ: Теплоионная эмиссия сернистого никеля (NiS) в зависимости от температуры, давления и ускорительного потенциала	274
И. ЛИЧА: О пространственном заряде на поверхности полупро- водников	284

	Стр.
И. ЛИЧА: Об определении зависимости между температурой и подвижностью носителей заряда в полупроводниках . . .	290
Г. Г. БРЭТЕСКУ: Вклад в изучение сферической аберрации сферического диоптра	296
Г. ПЕТРЕСКУ и Г. ПУРКАРУ: К вопросу о состоянии напряжения в фокусе землетрясения происшедшем 13 декабря 1957 года (в Иране)	303
Г. ПЕТРЕСКУ, К. РАДУ и Г. ПУРКАРУ: Объём промежуточных землетрясений в районе Вранча	311
А. НИКОЛАУ, Н. РЭДУЛЕСКУ М. КОЖОКАРУ и В. РУКСАН-ДРА: Колебание коэффициента обмена тепла между твёрдым нагретым телом и воздухом в связи со сменой давления . .	319
А. НИКОЛАУ, М. ДЖЕОРДЖЕСКУ, М. КАЗАН КОРБАСКА и ШТ. БУКУР: Зажигательный потенциал бипарных смесей биатомных газов	332
Ал. ГРИГОРИУ, М. ПЕТРЕСКУ, Х. ИВАНОВИЧ и Тр. ОЛАРУ: Земной ультраакустический фонд — в качестве первичного биофизического фактора	341
ТР. КРЕЦУ и Р. МИХАЙ: Свойства некоторых искровых счётчиков для регистрации альфа излучения	350

SOMMAIRE

MATHÉMATIQUE

	Pag.
O. ONICESCU: Systèmes à double structure.	15
GH. MIHOC: Théorème d'ergodicité pour les chaînes à liaisons complètes multiples	27
N. MIHĂILEANU: Les débuts mathématiques en notre pays	57
N. MIHĂILEANU: Interprétation de la géométrie de Lobacevski dans un espace euclidien ayant une dimension de plus	63
I. D. TEODORESCU: Méthode de congruences pseudo-orthogonales dans la théorie de la relativité, I	92
D. SMARANDA: Sur les géodesiques des espaces projectifs-complexes V_{2p} à courbure négative	96
J. DRĂGHICI: Sur les similitudes de l'espace euclidien à trois dimensions	110
ȘT. TEODORESCU: Die Fälle der Projektionswinkeltreue	124
C. A. CAZACU: Surfaces de Riemann partiellement régulièrement exhaustibles	152
N. DINCULEANU: On the seminorms N_p	163
L. ARAMĂ: Une évaluation du reste dans l'approximation des fonctions par les polynômes de S. N. Bernstein	178
G. MARCUS: Caractérisations locales et caractérisation globales des fonctions intégrables et des fonctions intégrales.	183
J. COLOJOARĂ: La représentation de l'algèbre $L_{w*}(H, I)$ dans une algèbre d'opérateurs d'un espace Hilbert.	194
AL. SOLIAN: Semi-topologie des groupes de transformations.	203
N. CRISTESCU: Boundary conditions in the mouvement of extensible strings	215
P. P. TEODORESCU: Sur l'utilisation des fonctions de tension dans le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées obliques.	227
N. ȘANDRU: Sur l'action des charges concentrées à l'intérieur de quelques domaines plans infinis	242
EL. UNGUREANU: L'application d'une méthode semi-inverse, aux mouvements à surface libre dans la hydrodynamique sousterraine.	251
ION I. CRISTEA: Considérations des surfaces de tourbillon dans l'étude des mouvements rotationnels permanents à trois dimensions des fluides parfaits barotropes.	265

PHYSIQUE

T. GHEORGHIU, A. NICOLAU, N. RĂDULESCU și E. POPESCU: Thermionenemission von Nickelsulfid (NiS) in Abhängigkeit der Temperatur, des Druckes und des Potentialgefalles	275
I. LICEA: Sur la charge d'espace à la surface des semiconducteurs	284
I. LICEA: Sur la détermination de la dépendance entre la température et la mobilité des portants de charge en semiconducteurs	290

	<u>Pag.</u>
G. G. BRĂTESCU : Contributions à l'étude de l'aberration de sphéricité du dioptré sphérique	297
G. PETRESCU și G. PURCARU : Sur l'état tensionel au foyer du séisme du 13 décembre 1957 (Iran)	303
G. PETRESCU, C. RADU și G. PURCARU : Le volume des séismes intermediares de Vrancea	311
A. NICOLAU, N. RĂDULESCU, M. COJOCARU și V. RUXANDRA : La variation avec la pression du coefficient d'échange de chaleur entre un corps solide chauffé et l'air.	320
AL. NICOLAU, M. GEORGESCU, M. CAZAN CORBASCA, ȘT. BUCUR : The breakdown potential of biatomic gas mixtures.	332
AL. GRIGORIU, M. PETRESCU, H. IVANOVICI, TR. OLARU : Le fond ultraacoustique terrestre comme facteur biophysique primaire. L'origine de la périodicité de l'équilibre colloidal	341
TR. CREȚU, R. MIHAI : Les propriétés des compteurs α a étincelles. . .	350

MATEMATICĂ

SISTEME CU DUBLĂ STRUCTURĂ

CONSIDERAȚII PRELIMINARE

OCTAV ONICESCU

1. Generalități asupra sistemelor cu dublă structură

Studiul fenomenelor naturale ne oferă numeroase exemple de sisteme cu dublă structură, care pot fi considerate, în genere, formate dintr-o macro- și o microstructură intim legate între ele.

Aceste exemple merg de la sistemul constituit de un gaz sau de un fluid oarecare sau de alte sisteme comparabile cu ele, în care același substrat material fizic se oferă studiului sub cele două aspecte macro- și micro-structural, pînă la sistemul care face obiectul Teoriei Informațiilor constituit din Informație și Răspuns, care nu mai au aceeași bază materială, dar între care este o strînsă legătură prin intermediul perturbației reprezentate de un canal.

În unele din aceste sisteme atît micro- cît și macrostructura sau numai una din ele, în special microstructura, au caracter aleator. În altele microstructura are numai aspectul pe care-l vom numi neregulat fără să putem releva caracterul său aleator sau nealeator; neregularitatea fiind doar o formă nesuficientă pentru a defini structura aleatoare.

În articolul de față, care are caracter introductiv, accentuăm în special caracterul neregulat al microstructurilor și caracterul uniform al macrostructurilor.

În sistemele cu microstructură aleatoare, dincolo de această neregularitate, trebuie căutate, așa cum se face în teoria gazelor, de pildă, sau în teoria plasmei, caracterele proprii structurilor aleatoare care merg mult mai adînc decît simpla neregularitate.

2. Structurile uniforme

Să considerăm segmentul $[0,1]$ o mulțime finită E de puncte ale acestui segment și un etalon Λ .

Fie n_x numărul punctelor situate în interiorul unui segment de lungime Λ , cu originea în punctul de abscisă x și situat în interiorul segmen-

tului. Numărul n_x este, în general, variabil cu x . Cu cît variabilitatea este mai mare, cu atît neregularitatea distribuției punctelor este mai mare.

Ne propunem să caracterizăm distribuțiile destul de regulate relativ la Λ , pentru a le putea numi uniforme.

Să considerăm în acest scop frecvența relativă $f_x = \frac{n_x}{n}$ și media $e_\Lambda = \frac{1}{r} \sum_{x \in I} f_x$ unde n este numărul punctelor din N iar r este numărul valorilor din mulțimea I în care variază x . Abaterea medie patrată

$$\mu^2 = \frac{1}{v} \sum_{x \in I} (f_x - e_\Lambda)^2$$

ne poate servi pentru a caracteriza uniformitatea, bineînțeles convențional, presupunînd, de pildă, că

$$\mu < \frac{1}{10}.$$

Această limitare depinde de caracterul mulțimei E și trebuie pusă în legătură cu alte aspecte ale acestei mulțimi, pe care sîntem obligați să le luăm în considerație. În general structurile uniforme sînt macrostructuri pentru care μ este de ordinul măsurilor practice curente macroscopice. Dacă, de pildă, segmentul $[0,1]$ are lungimea de un centimetru și Λ este un etalon macroscopic, este suficient să luăm ca limitare pentru μ valoare $\frac{1}{10}$.

3. Structurile neregulate

În aceleași condiții ca la numărul precedent luînd însă etalonul λ să presupunem că n_x prezintă o foarte mare neregularitate. Cum o caracterizăm?

Să presupunem, pentru aceasta a fi împărțit valorile lui n_x , (unde $x = 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$, cu N suficient de mare, de ordinul lui $\frac{1}{\lambda}$) în clase după mărime și că avem același număr de n_x -i în fiecare din aceste clase. Aceasta nu se întîmplă cu siguranță în cazul cînd punctele lui E sînt erorile unei operații de măsură cu aproximația 1 (lungimea segmentului $[0,1]$), deoarece, în acest din urmă caz numărul valorilor diferitelor clase este repartizat după legea lui Gauss. Ori de cîte ori punctele din E reprezintă rezultatele unui eveniment aleator bine caracterizat față de etalonul λ , repartitia lui n_x în clase urmează, cu abaterile obișnuite, o lege determinată proprie evenimentului. Repartitia neregulată caracterizată prin uniformitatea repartitiei uniforme în clase este semnul unei lipse totale a aspectului pe care-l numim aleator, și este specifică neregulari-

tății punctelor din E. Uniformitatea repartiției în clase corespunde, precum se știe, entropiei maxime proprii repartițiilor celor mai neregulate. Sintem astfel conduși să caracterizăm neregularitatea prin valoarea entropiei.

$$H_{E,\lambda} = - \sum_{x \in I} f_x \log f_x$$

Entropia trebuie să fie cât mai mare pentru ca neregularitatea să fie cât mai mare. Nu știm să existe criterii numerice intrinseci de neregularitate, dar putem construi așa cum se face pentru temperaturi, o scară ce să constituie un criteriu satisfăcător.

Fie pentru aceasta O și L, limitele între care poate varia la $H_{E,\lambda}$ pentru diferitele mulțimi constituite de n puncte ale segmentului [0,1]. Împărțim intervalul (O,L) în m părți egale și catalogăm repartițiile pe grade de neregularitate după intervalul mai mult sau mai puțin apropiat de extreme în care se găsește valoarea entropiei unei mulțimi determinate.

4. Dualitatea micro- și macrostructură

Să presupunem că mulțimea E posedă un etalon de uniformitate λ și un etalon de neregularitate λ . Avem atunci de a face cu o dublă structură macrouniformă și microneregulată. Un exemplu la îndemână pentru o astfel de dublă structură avem, dacă punem un corp cu înfățișare lucie deci macrouniformă, sub o lupă foarte puternică care ne relevă o întreagă lume de neregularități, bineînțeles pentru etalonul corespunzător măririi. Puterea de mărire a lupei ne dă în acest caz o evaluare a ceea ce putem numi *distanța* între micro- și macrostructură. Ca să aprofundăm această din urmă noțiune considerăm încă și sub alte aspecte dualitatea micro- și macrostructură. Ea constituie un obiect matematic încă puțin studiat ca atare. În cartea noastră despre Numere și Sisteme aleatoare am dat în același timp câteva modele matematice, mai cunoscute ale acestei dualități și am analizat altele, mai puțin cercetate din punctul de vedere al acestui obiect matematic. Modelul fizic clasic al dualității este un gaz închis într-un recipient cu dublă structură : macroscopică (volum, temperatură, presiune) pe de o parte, agitație moleculară, pe de alta. Astăzi trebuie să alăturăm acestei structuri pe aceea pe care fizicienii o numesc „plasmă“.

Pentru amândouă aceste obiecte fizice, care nu sînt singurele cu dualitate de structură macro- și micro- sînt date mărimi specifice fiecăreia dintre structuri. Și pentru un gaz simplu și pentru o plasmă avem de notat mai întîi mărimile curente ale macrostructurii, volum, densitate, presiune, cantitate de căldură, temperatura, mărimile de stare electrică și magnetică în special pentru plasmă.

La nivelul microstructurii mărimile caracteristice sînt altele. Sînt mai întîi de precizat, cînd e vorba de un gaz, speciile de molecule, numărul lor pe unitatea de volum, gradele de libertate ale sistemului, vitezele,

impulsurile, forțele de masă, natura ciocnirilor, sau a altor interacțiuni dintre moleculele componente sau ale acestora cu pereții recipientului.

Mărimile macrostructurii sînt globale, puține la număr și susceptibile de măsurători experimentale precise și oarecum curente. De aceea și legile care guvernează macrostructura gazelor sînt de mult cunoscute, ele se înglobează de altfel în legile clasice ale mecanicii fluidelor.

Mărimile microstructurii sînt numeroase, de ordinul numărului moleculelor componente. O determinare individuală a poziției sau a vitezei fiecărei molecule în decursul mișcării ei complexe este dacă nu imposibilă pentru o singură moleculă, improbabilă efectiv pentru toate moleculele unui determinat volum de gaz.

De altfel această determinare individuală a mărimilor ar fi fără importanță. Este suficientă o caracterizare statistică a acestor diverse mărimi prin legile lor de repartiție. Dualitatea de structură se manifestă deci nu numai prin mărimi diferite atașate celor două structuri dar și prin punctele de vedere diferite în ce privește măsura lor. Mărimile macrostructurii sînt obiecte de măsură directă, mărimile microstructurii sînt obiecte ale unui cîmp de probabilitate și pot fi caracterizate numai prin legi de repartiție. Înainte de a examina mai îndeaproape, deși totuși numai sumar, cele cîteva obiecte mai curente cu macro- și microstructură trebuie să semnalăm necesitatea definirii unui element, fundamental pentru caracterizarea acestor obiecte, care stabilește diferența de nivel, distanța într-un anumit sens, între macro- și microstructură.

În cazul unui gaz această distanță este măsurată de diferența între volumul minim ale unui sistem de molecule care poate fi considerat drept un gaz, cu toată fenomenalitatea lui macrostructurală susceptibilă de a exercita o presiune asupra pereților, de a avea o temperatură etc. și volumul unei molecule a gazului. Pentru numeroase sisteme nu putem încă nici măcar cu o aproximație admisibilă, să facem delimitarea de mai sus. În cazul unui masă de apă, de pildă, e greu de afirmat care este volumul și numărul minim de molecule de la care înainte putem vorbi de o adevărată macrostructură. Dar nu credem a greși mult dacă la temperatura curentă a atmosferei noastre, fixăm volumul minim la acela al unei picături, sferă cu raza 10^{-2} cm. Cum raza moleculei de apă este de aproximativ 10^{-10} , raportul dintre razele corespunzătoare acestor volume este 10^8 . Acest număr dă o indicație asupra diferenței de ordin de mărime între micro- și macrostructură. La alte obiecte fizice, la gazele ionizate de pildă, problema este mai complicată, întrucît în microstructură intervin, alături de molecule și electronii chiar dacă numai în calitatea lor de purtători de sarcini electrice.

Această indicație asupra distanței dintre micro- și macrostructură, pe care ne-o dă sistemul, constituit de un gaz simplu, ne poate servi ca îndrumare la constituirea obiectului matematic al dublei structuri considerată mai sus. Nu am pus problema acestei distanțe cînd am definit dubla structură matematică pentru că fiind vorba de o noțiune fundamentală nu o putem caracteriza fără sprijinul unui model fizic, pe care acum îl introducem. 10^{-8} este un ordin de măsură la care două lungimi pot fi

socotite egale. O mulțime de segmente care diferă între ele cu cel mult 10^{-8} trebuie considerate ca avînd o repartiție uniformă. Măsurile sub dimensiunea 10^{-8} sînt în convențiile experimentale de natură microscopică și constituie universul microstructurii cu fenomenalitatea sa proprie.

Se deschide pentru statistică, o dată cu definirea acestei distanțe între micro- și macrostructură, o serie de probleme importante relative la volumul selecțiilor caracteristice pentru fiecare dintre cele două structuri, dar și pentru relațiile dintre ele, care nu trebuie pierdute din vedere, pentru că amîndouă privesc același obiect.

Nu numai în perioada începuturilor teoriei cinetice a gazelor, studiul celor două structuri a reprezentat pentru foarte mulți fizicieni doctrine, dacă nu de-a dreptul contradictorii cel puțin opuse.

Teoria cinetică a ambiționat întotdeauna o preeminență la care părea să-i dea dreptul însăși caracterul emanamente teoretic pe care-l are și conduce la explicarea atît a mecanismului intim al cineticei gazelor și în genere a materiei cît și a macrostructurii ale cărei mărimi prezentate ca valori medii au proprietățile pe care macrostructura le constată experimental. Considerentele mecanice simple pe care se bazează teoria cinetică, pornind de la principiul conservării impulsului și a energiei în timpul mișcării moleculelor după legile newtoniene, par să dea o garanție de siguranță acestei teorii și consecințelor sale, echivalente cu ale mecanicii clasice însăși.

Fizicienii care cercetează direct macrostructura acestor obiecte nu întîlnesc niciodată în experiențele lor ori cît de fine, nici una dintre mărimile microstructurii. Macrostructura pare a rămîne singurul obiect de experiență pentru mulți fizicieni iar componentele sale par acestora singurele îndreptățite să intereseze pe cercetătorul naturii.

Astăzi situația este schimbată în ce privește teoria cinetică. Pe de o parte aproape unanimitatea fizicienilor au acceptat universul microstructurii pentru că multe experiențe ajung pînă la el și realitatea lui fizică nu mai poate fi contestată. Pe de altă parte teoreticienii microstructurii, atunci cînd au vrut să edifice o teorie riguroasă s-au lovit de dificultăți care păreau evitabile la început, cînd Boltzmann a pus fundamentele teoriei sale, dar care persistă și azi sub cele mai variate forme.

Legile Mecanicii nu sînt suficiente pentru edificarea unei mecanici statistice riguroase. Un principiu de natură termodinamică pe care l-a folosit Boltzmann considerîndu-l ca o simplă consecință a legilor mecanice, sau un principiu analog acestuia, trebuie încă acceptat pentru a da un sens fenomenologiei microstructurii.

Discutarea unor atari principii ne scoate însă din cadrul în care voim să ne menținem acum, deoarece ele fac să intervină în mod esențial timpul iar obiectul nostru nu este dinamic ci static.

În cadrul restrîns al teoriei cinetice și cu atît mai mult în acel al Mecanicii statistice care au ca obiect microstructurile, n-a lipsit niciodată interesul profund pentru verificările experimentale indirecte asupra microstructurii. Poziția inversă este însă mai rar adoptată cel puțin cînd e vorba

de unele domenii noi. Un astfel de domeniu e constituit azi de macro- și microstructura unui gaz ionizat. Ultimele două cărți mai importante asupra acestei materii aceea a lui L. Spitzer („Fizica Gazelor complet ionizate“, 1956) și aceea a lui J. L. Delacroix („Introducerea la teoria gazelor ionizate“, 1958) se situează pe cele două poziții ce par opuse: Descrierea macroscopică în directă legătură cu experiența și teoria microstructurală (Delacroix) care singură pare să poată da o bună explicație metodei hidrodinamice adoptată de cel dintâi. În fapt cele două puncte de vedere se completează unul pe altul. Cîte o dată examenul macroscopic dă rezultate mai directe și foarte precise. Nu e mai puțin adevărat însă că el duce și la rezultate îndoielnice care au putut fi rezolvate numai cu ajutorul teoriei microstructurii.

Și în acest domeniu mai complicat prin prezența mai multor constituenți în interacțiune (molecule, electroni, ioni) obiectul este unic. Diferite sînt macro- și microstructura dar ele trebuie considerate în unitatea lor. Nici un punct de vedere parțial nu poate lămuri obiectul unic care este indisolubil legat de fiecare din cele două structuri.

O situație analogă se prezintă în cadrul hidrodinamicii fluidelor care a fost legată de microstructura acestora și pare unora că poate da seama și de cele mai complexe fenomene ale lor rămînînd la nivelul macrostructurii. Turbulența a dat însă loc la atîtea dificultăți care nu pot fi învinse, necum explicate macrostructural, încît o mare parte dintre cei mai ireductibili hidrodinamiști se vād siliți să aprofundeze microstructura fluidelor turbulente în măsura în care acest lucru este indispensabil pentru lămurirea situațiilor în fața cărora îi aduce experiența.

Înainte de a trece la o prezentare de altfel foarte succintă a mărimilor și relațiilor dintre ele, care apar în oricare dintre aceste obiecte cu dublă structură, de pildă în plasmă sau gaz ionizat, este necesară o observație fundamentală privind obiectul matematic pe care-l avem în vedere.

Noi am definit matematic acest obiect numai pentru un sistem de puncte cu o dimensiune, în vreme ce obiectele fizice cu dublă structură de care am vorbit pînă acum, sînt obiecte spațiale. Nu e necesar să facem noi generalizarea necesară pentru obiectul matematic introdus, întrucît nu aceasta constituie vreo dificultate în organizarea acestui obiect. Atunci cînd vom asocia punctelor mulțimii de bază unele mărimi, reprezentate de funcții numerice sau vectoriale, va trebui doar să remarcăm că ele se studiază într-un fel atunci cînd e vorba de macrostructuri, și în alt fel atunci cînd e vorba de microstructură.

Un bun exemplu avem cînd manipulăm funcțiile în teoria integralei Lebesgue: Conceptul de ordine, care este fundamental pentru macrostructură, își pierde interesul cînd trecem la microstructură unde capătă valoare noțiunea de măsură și cu ea aceea de probabilitate, în care ordinea nu mai are nici un rol.

СИСТЕМЫ С ДВОЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей статье, автор выявляет новый математический предмет, которого называет системой с двойной структурой — макро и микроструктурой. Он определяет однообразные макроструктуры по отношению к эталону Λ и неоднобразные микроструктуры по отношению к эталону λ .

Он даёт некоторые примеры подробно исследованные в своей недавно изданной книге о случайными и нерегулярными числах и системах подчёркивая в то же время различие существующее между случайных.

SYSTÈMES À DOUBLE STRUCTURE

RÉSUMÉ

L'auteur met en évidence un nouveau objet mathématique qu'il nomme système à double structure : une macro- et une microstructure. Il définit les macrostructures uniformes par rapport à un étalon Λ et la microstructure irrégulière par rapport à un étalon λ .

Il donne des exemples qui ont été traités de plus près dans son récent livre sur les Numéros et Systèmes aléatoires, relevant en même temps la différence entre aléatoire et irrégulier.

TEOREMĂ ERGODICĂ PENTRU LANȚURILE CU LEGĂTURI COMPLETE MULTIPLE

G. H. MIHOICĂ

În cele ce vor urma vom considera cazul unui lanț staționar de ordin de multiplicitate doi, cu un număr finit de stări.

Considerăm un șir de variabile aleatoare $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ fiecare putând lua una din valorile $a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$ în condițiile următoare :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & P(X_1 = a_i) = p_i \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \quad \sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1 \\ \text{b)} \quad & P(X_2 = a_j | X_1 = a_i) = \varphi_{i;j}(p_1, p_2, \dots, p_{m+1}) = \varphi_{i;j}(\bar{p}) \\ & (i, j = 1, 2, \dots, m+1) \end{aligned}$$

unde pentru prescurtare am notat*

$$\bar{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_{m+1}\}, \quad \sum_{j=1}^{m+1} \varphi_{i;j}(\bar{p}) = 1 \quad (1)$$

$\varphi_{i;j}(\bar{p})$ sînt funcții date de $\bar{p}$, luînd pentru fiecare $\bar{p}$ valori cuprinse între 0 și 1, verificînd relația precedentă.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & P(X_3 = a_k | X_2 = a_j; X_1 = a_i) = \\ & = \psi_{i;j;k}(p_1, \dots, p_{m+1}, \varphi_{i;1}(p_1, \dots, p_{m+1}), \dots, \varphi_{i;m+1}(p_1, \dots, p_{m+1})) = \psi_{i;j;k}(\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})) \\ & (i, j, k = 1, 2, \dots, m+1) \end{aligned}$$

unde pentru prescurtare am notat

$$\bar{\varphi}_i(\bar{p}) = \{\varphi_{i;1}(\bar{p}), \dots, \varphi_{i;m+1}(\bar{p})\} \quad (2)$$

* Prin $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ vom înțelege un vector linie, iar prin $(x_1, \dots, x_m)$ un vector coloană.

$\psi_{i,j;k}$ sînt funcții date de $\bar{p}$ și $\bar{\varphi}_i(\bar{p})$, cuprinse între 0 și 1 verificînd pentru fiecare $i, j \in (1, 2, \dots, m+1)$ relația

$$\sum_{k=1}^{m+1} \psi_{i,j;k} [\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})] = 1 \quad (3)$$

$$d) \quad P[X_4 = a_l | X_3 = a_k, X_2 = a_j, X_1 = a_i] = \psi_{j;k;l} [\bar{\varphi}_i(\bar{p}); \bar{\psi}_{i,j}(\bar{p}; \bar{\varphi}_i(\bar{p}))]$$

unde am folosit notația

$$\bar{\psi}_{i,j}[\bar{p}; \bar{\varphi}_i(\bar{p})] = \{\psi_{i,j;1}[\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})], \dots, \psi_{i,j;m+1}[\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})]\} \quad (4)$$

Funcția $\psi_{j;k;l}$ este definită la punctul c). După cum se vede ea variază numai în raport cu indicii j, k, l , dintre care primii doi, se referă la valorile a_k, a_j luate de variabilele X_3, X_2 iar ultimul indice l la valoarea a_l luate de variabila X_4 . Lanțul este multiplu de ordinul doi pentru că funcția $\psi_{j;k;l}$ este aceeași oricare ar fi valoarea luate de variabila aleatoare X_1 .

Argumentele de care depinde funcția $\psi_{j;k;l}$ sînt respectiv $\bar{\varphi}_i(\bar{p})$ și $\bar{\psi}_{i,j}[\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})]$ care în conformitate cu punctele b) și c) reprezintă respectiv probabilitățile condiționate de variabilele aleatoare X_2, X_3 .

e) Pentru cazul $n > 4$ introducem notațiile :

$$P(X_n = a_{j_n} | X_{n-1} = a_{j_{n-1}}, X_{n-2} = a_{j_{n-2}}, \dots, X_1 = a_{j_1}) = p_{j_1, j_2, \dots, j_n} \quad (5)$$

$$\bar{p}_{j_1, \dots, j_{n-1}} = \{p_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, 1}, p_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, 2}, \dots, p_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, m+1}\}$$

Prin definiție, avem :

$$p_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \psi_{j_{n-2}; j_{n-1}; j_n}(\bar{p}_{j_1, \dots, j_{n-3}}; \bar{p}_{j_1, \dots, j_{n-2}}) \quad (6)$$

Relația (6) ne arată că probabilitatea egalității $X_n = a_{j_n}$ condiționată de șirul $a_{j_{n-1}}, a_{j_{n-2}}, \dots, a_{j_1}$ de valori luate de variabilele precedente $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1$, este o funcție dată care depinde de valorile $a_{j_{n-2}}$ și $a_{j_{n-1}}$, avînd ca argument probabilitățile corespunzătoare valorilor X_{n-2} și X_{n-1} .

Din aceste considerații, rezultă că lanțul este multiplu de ordinul doi. Extensia la un lanț multiplu de ordin k nu prezintă nici o dificultate.

Cazuri particulare : Dacă funcțiile $\psi_{i,j;k}$ definite mai sus nu depind de argumentele lor, reducîndu-se la niște constante, obținem lanțurile Markov de ordinul de multiplicitate doi.

Particularizînd funcțiile $\psi_{i,j;k}$ noi obținem scheme de contagiune, printre care și acelea ale lui G. Pólya.

§ 2. Relația funcțională fundamentală

Notăm

$$P(X_{n+1} = a_i) = P_i^{(n+1)}[\bar{p}; \bar{\varphi}(\bar{p})] \quad (7)$$

unde :

$$\bar{\varphi}(\bar{p}) = (\bar{\varphi}_1(\bar{p}), \bar{\varphi}_2(\bar{p}), \dots, \bar{\varphi}_{m+1}(\bar{p})) \quad (8)$$

Pentru că suma elementelor din fiecare linie este egală cu 1, matricea $\bar{\varphi}(\bar{p})$ conține $m(m+1)$ elemente diferite.

Fiind date funcțiile fundamentale $\psi_{i;j;k}$, probabilitatea (7) depinde de condițiile inițiale, date la punctele a), b).

Se vede că $P_i^{(n+1)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ reprezintă probabilitatea ca la experiența $n+1$ să se obțină răspunsul corespunzător la variabila a_i . Această probabilitate verifică relația de recurență fundamentală :

$$P_i^{(n+1)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})] = \sum_{j=1}^{m+1} p_j P_i^{(n)}[\bar{\varphi}_j(\bar{p}); \bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p}))] \quad (9)$$

După cum se vede, în membrul al doilea între paranteze în locul vectorului $\bar{p}$ apare vectorul $\bar{\varphi}_j(\bar{p})$, iar în locul matricei $\bar{\varphi}(\bar{p})$ apare matricea $\bar{\psi}_j[\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})]$, definită de egalitatea :

$$\bar{\psi}_j[\bar{p}; \bar{\varphi}_j(\bar{p})] = (\bar{\psi}_{j;1}[(\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p}))]; \dots; \bar{\psi}_{j;m+1}[(\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p}))]) \quad (10)$$

Această matrice conține $m(m+1)$ elemente distincte.

§ 3. Teorema ergodică

Se poate demonstra, la fel ca și pentru lanțurile Markov, sau pentru lanțurile cu legături complete simple, că există unele proprietăți de ergodicitate.

Prin definiție vom spune că lanțul este ergodic dacă :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_i^{(n)}[\bar{p}; \bar{\varphi}(\bar{p})] = P_i \quad (11)$$

unde P_i este o constantă, care rămâne aceeași oricare ar fi valorile inițiale $\bar{p}$ și $\bar{\varphi}(\bar{p})$.

Teoremă : Dacă sînt verificate condițiile următoare :

1. Funcțiile $\varphi_{i;j}(\bar{p})$ sînt continue în raport cu fiecare $0 \leq p_j \leq 1$ ($1 \leq j \leq m$) și admit derivate parțiale continue și mărginite în acest domeniu, în raport cu p_i ($i = 1, 2, \dots, m$)

2. Domeniul Δ punctelor din spațiul $R^{m(m+2)}$ definit de

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad 0 \leq \varphi_{j;k} \leq 1 \quad 1 \leq i, k \leq m \quad 1 \leq j \leq m+1$$

este un spațiu metric complet cu distanța $\rho(\bar{p}, \bar{q})$, $\bar{p}, \bar{q} \in \Delta$, $p_i \in \bar{p}$, $\varphi_{i;j} \in \bar{q}$ fiecare aplicație $f_j: \Delta \rightarrow \Delta$ ($j = 1, 2, \dots, m+1$) reprezentînd trecerea punctului $\bar{p}$, $\bar{\varphi}(\bar{p})$ în $\bar{\varphi}_j(\bar{p})$, $\bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p}))$, este mărginită și avem pentru orice $\bar{p}', \bar{p}'' \in \Delta$

$$\rho[f_j(\bar{p}'), f_j(\bar{p}'')] \leq \|\varphi\|_j \quad \rho(\bar{p}'; \bar{p}'') \quad 1 \leq j \leq m+1$$

astfel că

$$\|f\|_j < 1 \quad j = j_0$$

$$\|f\|_j \leq 1 \quad j \neq j_0$$

3. Funcțiile $\psi_{i,j,k}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, m+1$) sînt continui în Δ și verifică relațiile

$$0 < \psi_{i,j,k}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})] < 1$$

oricare ar fi

$$i, j, k = 1, 2, \dots, m+1.$$

4. Există un indice i_0 , $1 \leq i_0 \leq m+1$ astfel că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_{i,j,i_0,i_0,\dots,i_0,k} = \bar{p}_k$$

oricare ar fi indicii $i, j, k = 1, 2, \dots, m+1$.

Lanțul considerat este ergodic, adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})) = P_i \quad i = 1, 2, \dots, m+1 \quad (12)$$

exceptînd eventual punctele $p_{j0} = 0$ pentru care constanta P_i este independentă de condițiile inițiale $\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})$.

Demonstrație.

Demonstrația consistă în a arăta că șirul $P_i^{(n)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ este compact și că putem extrage din acest șir o infinitate de subșiruri convergente, care tind către aceeași limită, care este o constantă. În acest caz noi vom arăta în primul rînd egala continuitate a funcțiilor $P_i^{(n)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ în raport cu $p_1, p_2, \dots, p_m$

a) *Egala continuitate a funcțiilor $P_i^{(n)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$.*

Elementele matricii $\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})$ se găsesc în domeniul Δ .

Presupunem că avem :

$$|P_i^{(n)}[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')] - P_i^{(n)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]| < M \rho[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}'); \bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})] \quad (13)$$

pentru orice

$$\bar{p}, \bar{p}' \in \Delta, \bar{\varphi}(\bar{p}), \bar{\varphi}(\bar{p}') \in \Delta$$

pentru un $n > 1$.

Din relația funcțională (9) deducem :

$$\begin{aligned} |P_i^{(n+1)}[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')] - P_i^{(n+1)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]| &\leq \sum_{j=1}^{m+1} |p'_j - p_j| P_i^{(n)}[\bar{\varphi}_j(\bar{p}'), \bar{\psi}_j(\bar{p}', \bar{\varphi}_j(\bar{p}')(\bar{p}'))] + \\ &+ \sum_{j=1}^{m+1} p_j |P_i^{(n)}[\bar{\varphi}_j(\bar{p}'), \bar{\psi}_j(\bar{p}'), \bar{\varphi}_j(\bar{p}')] - P_i^{(n)}[\bar{\varphi}_j(\bar{p}), \bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p}))]| \end{aligned} \quad (14)$$

Putem găsi o constantă h , astfel încît :

$$\sum_{j=1}^{m+1} |\bar{p}'_j - \bar{p}_j| \cdot P_i^{(n)}[\bar{\varphi}_j(\bar{p}'), \bar{\psi}_j(\bar{p}', \bar{\varphi}_j(\bar{p}'))] \leq h \rho[\bar{p}', \bar{\varphi}_j(\bar{p}'); \bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})] \quad (15)$$

pe de altă parte :

$$\sum_{j=1}^{m+1} P_j |P_i^{(n)}[\bar{\varphi}_j(\bar{p}'), \bar{\psi}_j(\bar{p}', \bar{\varphi}_j(\bar{p}'))] - P_i^{(n)}[\bar{\varphi}_j(\bar{p}), \bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p}))]| \leq$$

$$\leq M \sum_{j=1}^{m+1} P_j \rho[\bar{\varphi}_j(\bar{p}'), \bar{\psi}_j(\bar{p}', \bar{\varphi}_j(\bar{p}'))]; \bar{\varphi}_j(\bar{p}), \bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})) \leq$$

$$\leq M(1 - p_{j_0} + p_{j_0} \|f\|_{j_0}) \rho[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}'); \bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$$

Din (14) rezultă :

(16)

$$|P_i^{(n+1)}[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')] - P_i^{(n+1)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]| \leq h + M[1 - p_{j_0} + p_{j_0} \|f\|_{j_0}] \rho[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}'); \bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$$

Este suficient să luăm

$$M > \frac{h}{p_{j_0}(1 - \|f\|_{j_0})} \quad (17)$$

pentru ca inegalitatea (13) să fie verificată și pentru $n + 1$.

Cum membrul doi al acestei inegalități nu depinde de n , egala continuitate a funcțiilor $P_i^{(n)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ în raport cu $p_1, p_2, \dots, p_m$ este demonstrată.

b) *Existența funcțiilor limită pentru șirul $P_i^{(n)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$*

Din proprietatea de egală continuitate a funcțiilor $P_i^{(n)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ rezultă că mulțimea acestor funcții este compactă. Putem deci extrage un subșir convergent $P_i^{(r_k)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ care tinde uniform către o limită continuă $P_i^{(r)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$. Considerăm numerele

$$\bar{P}_i^{(n)} = \sup_{\bar{p} \in \Delta} P_i^{(n)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]; \quad \underline{P}_i^{(n)} = \inf_{\bar{p} \in \Delta} P_i^{(n)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})] \quad (18)$$

Ținînd cont de relația funcțională (9) se vede că șirul $\bar{P}_i^{(n)}$ este monoton descrescător iar șirul $\underline{P}_i^{(n)}$ monoton crescător și că :

$$\bar{P}_i^{(n)} \leq \bar{P}_i^{(1)} < 1, \quad \underline{P}_i^{(n)} \geq \underline{P}_i^{(1)}, \quad \bar{P}_i^{(n)} > \underline{P}_i^{(n)}$$

Prin urmare cele două șiruri sînt convergente și avem :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{P}_i^{(n)} = \bar{P}_i \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{P}_i^{(n)} = \underline{P}_i \quad 0 \leq \underline{P}_i \leq \bar{P}_i \leq 1 \quad (19)$$

Considerînd relația :

$$P_i^{(r_k+1)}[\bar{p}, \bar{q}(\bar{p})] = \sum_{j=1}^{m+1} p_j P_i^{(r_k)}[\bar{q}_j(\bar{p}); \bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{q}_j(\bar{p}))] \quad (20)$$

deoarece fiecare probabilitate din membrul drept tinde către o limită determinată, rezultă același lucru pentru membrul stîng.

Subșirul $P_i^{(r_k+1)}[\bar{p}, \bar{q}(\bar{p})]$ este deci de asemenea convergent și tinde către o limită $P_i^{(r+1)}[\bar{p}, \bar{q}(\bar{p})]$ satisfăcînd relația :

$$P_i^{(r+1)}[\bar{p}, \bar{q}(\bar{p})] = \sum_{j=1}^{m+1} \bar{p}_j P_i^{(r)}[\bar{q}_j(\bar{p}), \bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{q}_j(\bar{p}))] \quad (21)$$

după cum se poate ușor demonstra.

Prin analogie se poate construi un șir $P_i^{(r_k+s)}[\bar{p}, \bar{q}(\bar{p})]$ s fiind un întreg mai mare decît 1, de funcții limită, continui în Δ și care admit aceeași margine superioară $\bar{P}_i$ și aceeași margine inferioară $\underline{P}_i$.

c) *Unicitatea funcției limită.*

Ținînd cont de (21), funcția limită $P_i^{(r+s)}[\bar{p}, \bar{q}(\bar{p})]$ se poate scrie sub forma :

$$P_i^{(r+s)}[\bar{p}, \bar{q}(\bar{p})] = \sum_{\substack{j_l=1 \\ 1 \leq l \leq s}}^{m+1} \bar{p}_{j_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{l-1} j_l} \cdots P_{j_s} P_i^{(r)}[\bar{p}_{j_1, \dots, j_{s-1}}; \bar{\psi}(\bar{p}_{j_1, \dots, j_{s-1}}, \bar{p}_{j_1, \dots, j_s})] \quad (22)$$

unde am notat

$$\bar{p}_{j_1, \dots, j_{s-1}} = \{p_{j_1, \dots, j_{s-1}, 1}, \dots, p_{j_1, \dots, j_{s-1}, m}\}$$

În plus avem :

$$\sum_{j_l=1}^{m+1} P_{j_1} \cdot P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{l-1} j_l} = 1 \quad (1 \leq l \leq s) \quad (23)$$

Considerăm domeniul Δ_a definit de relațiile

$$0 \leq a \leq \bar{p}_j \leq 1 - a < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (24)$$

Admitem că pentru orice $p \in \Delta_a$, toate elementele matricii $\bar{q}(\bar{p})$ și $\bar{\psi}_j[\bar{p}, \bar{q}_j(\bar{p})]$ $j = 1, 2, \dots, m$ sînt cuprinse în Δ_a . Rezultă că pentru orice succesiune $j_1, j_2, \dots, j_s$ avem :

$$P_{j_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{l-1} j_l} \cdots P_{j_s} > 0 \quad (24)$$

Fie acum $\bar{p}' \in \Delta_a$ un punct în care $P_i^{(r+s)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ ia cea mai mare valoare. Notăm prin $p'_{j_1, \dots, j_s}$ valoarea probabilității $p_{j_1, \dots, j_s}$ în ipoteza că $\bar{p} = \bar{p}'$.

Rezultă din (22) :

$$P_i^{(r+s)}[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')] = P_i^{(r)}[\bar{p}'_{j_1, \dots, j_{s-3}}, \bar{\varphi}_j(\bar{p}'_{j_1, \dots, j_{s-3}}, \bar{p}'_{j_1, \dots, j_{s-2}})] \quad (25)$$

dacă $p'' \in \Delta_a$ reprezintă un punct unde $P_i^{(r+s)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ ia cea mai mică valoare, avem, folosind o notație analogă

$$P_i^{(r+s)}[\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'')] = P_i^{(r)}[\bar{p}''_{j_1, \dots, j_{s-3}}, \bar{\varphi}_j(\bar{p}''_{j_1, \dots, j_{s-3}}, \bar{p}''_{j_1, \dots, j_{s-2}})] \quad (26)$$

În relațiile (25) și (26) alegem toți indicii egali cu i_0 .

Avem :

$$P_i^{(r+s)}[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')] = P_i^{(r)}\left[\underbrace{\bar{p}_{i_0 \dots i_0}}_{s-3}; \bar{\varphi}_j\left(\underbrace{\bar{p}_{i_0 \dots i_0}}_{s-3}, \underbrace{\bar{p}'_{i_0 \dots i_0}}_{s-2}\right)\right] \quad (27)$$

$$P_i^{(r+s)}[\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'')] = P_i^{(r)}\left[\underbrace{\bar{p}''_{i_0 \dots i_0}}_{s-3}; \bar{\varphi}_j\left(\underbrace{\bar{p}''_{i_0 \dots i_0}}_{s-3}, \underbrace{\bar{p}''_{i_0 \dots i_0}}_{s-2}\right)\right] \quad (28)$$

Știm că

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \underbrace{P_{i_0 \dots i_0}^{(r+s)}}_s = \lim_{s \rightarrow \infty} \underbrace{P_{i_0 \dots i_0}^{(r+s)}}_s = \tilde{p}_i \quad (29)$$

Funcțiile $P_i^{(r+s)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ fiind egal continui în raport cu $\bar{p}$, și $\epsilon > 0$ fiind dat arbitrar, există $\eta > 0$ astfel ca :

$$|P_i^{(r+s)}[\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'')] - P_i^{(r+s)}[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')]| < \epsilon \quad (30)$$

dacă

$$|p''_j - p'_j| < \eta \quad 1 \leq j \leq m$$

Pentru s suficient de mare, avem :

$$\left| \underbrace{P_{i_0 \dots i_0}^{(r+s)}}_s - \underbrace{P_{i_0 \dots i_0}^{(r+s)}}_s \right| < \eta; \quad 1 \leq l \leq m \quad (31)$$

și deci

$$\left| P_i^{(r)}[\bar{p}''_{j_1 \dots j_{s-1}}, \bar{\varphi}(\bar{p}''_{j_1 \dots j_{s-1}}, \bar{p}''_{j_1 \dots j_s})] - P_i^{(r)}[\bar{p}'_{j_1 \dots j_s}, \bar{\varphi}(\bar{p}'_{j_1 \dots j_{s-1}}, \bar{p}'_{j_1 \dots j_s})] \right| < \epsilon$$

Ținând cont de (27), (28), rezultă :

$$|P_i^{(r+s)}[\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'')] - P_i^{(r+s)}[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')]| < \epsilon \quad (1 \leq i \leq m) \quad (32)$$

Fie acum $\bar{P}_i(a)$ și $\underline{P}_i(a)$ marginea superioară, respectiv inferioară a funcției $P_i^{(r+s)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ în Δ_a .

În acest caz rezultă :

$$\bar{P}_i(a) = P_i^{(r+s)}[\bar{p}', \bar{\varphi}(\bar{p}')] , \quad \underline{P}_i(a) = P_i^{(r+s)}[\bar{p}'', \bar{\varphi}(\bar{p}'')] \quad (33)$$

$$\bar{P}_i(a) - \underline{P}_i(a) < \varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ arbitrar. Astfel noi avem : $\bar{P}_i(a) = \underline{P}_i(a)$ ceea ce implică faptul că $P_i^{(r)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ se reduce la o constantă P_i în Δ_a . Deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar de mic, această concluzie rămîne de asemenea valabilă în Δ .

Astfel am demonstrat că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_i^{(n)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})] = P_i \quad (1 \leq i \leq m) \quad (34)$$

Limita P_i nu depinde de $\bar{p}$. Rămîne de arătat că această limită este aceeași oricare ar fi natura funcțiilor $\bar{\varphi}(\bar{p})$.

Scriind ecuația de recurență într-un punct determinat : $\bar{p} = \bar{p}'''$

$$P_i^{(n+1)}[\bar{p}''', \bar{\varphi}(\bar{p}''')] = \sum_{j=1}^{m+1} P_j''' P_i^{(n)}[\bar{\varphi}_j(\bar{p}''')], \quad \bar{\varphi}_j[\bar{p}''', \bar{\varphi}_j(\bar{p}''')] \quad (35)$$

În condițiile teoremei, pe baza relației (34), avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_i^{(n)}[\bar{\varphi}_j(\bar{p}''')], \quad \bar{\varphi}_j[\bar{p}''', \bar{\varphi}_j(\bar{p}''')] = R_i$$

unde R_i este o constantă, care nu depinde de valoarea funcțiilor $\bar{\varphi}_j(\bar{p}''')$ $0 \leq j \leq m$. Rezultă că și membrul al doilea al relației tinde către o limită care nu depinde de valoarea funcțiilor $\bar{\varphi}_j(\bar{p})$ în punctul $\bar{p} = \bar{p}'''$. Cum din relația (34) rezultă că această limită nu depinde nici de $\bar{p}'''$, urmează că teorema este demonstrată.

§ 4. Cazul linear

Vom aplica rezultatele generale obținute în cazul în care funcțiile $\varphi_i; j; k$ sînt lineare în raport cu argumentele lor.

Pentru simplificare, vom considera cazul $m = 1$.

Lanțul poate deci lua numai valorile a_1, a_2 . Lanțul este definit prin condițiile următoare :

$$a') \quad P(X_1 = a_1) = p$$

$$b') \quad P(X_2 = a_1 | X_1 = a_1) = \varphi_1(p), \quad P(X_2 = a_1 | X_1 = a_2) = \varphi_2(p)$$

$$c') \quad P(X_3 = a_1 | X_2 = a_1, X_1 = a_1) = a_{11} + b_{11}p + c_{11}\varphi_1(p)$$

$$P(X_3 = a_1 | X_2 = a_2, X_1 = a_1) = a_{10} + b_{10}p + c_{10}\varphi_1(p)$$

$$P(X_3 = a_1 | X_2 = a_1, X_1 = a_2) = a_{01} + b_{01}p + c_{01}\varphi_2(p)$$

$$P(X_3 = a_1 | X_2 = a_2, X_1 = a_2) = a_{00} + b_{00}p + c_{00}\varphi_2(p)$$

unde a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} sînt constante date.

d'). Pentru $n > 4$, avem :

$$p_{j_1 \dots j_n, 1} = a_{j_{n-1}j_n} + b_{j_{n-1}j_n} p_{j_1 \dots j_{n-2}, 1} + c_{j_{n-1}j_n} p_{j_1 \dots j_{n-1}, 1} \quad (36)$$

pentru orice

$$j_1, \dots, j_n = 1, 2$$

Notăm prin $Q_{j_{n-1}; j_n}$ operatorul linear definit de (36), aplicat celor două probabilități consecutive din șirul de probabilități : $p_{j_1 \dots j_n}$

Examinăm în conformitate cu condițiile din teorema de mai sus, în ce caz principiul ergodic este aplicabil.

În primul rînd condiția 3° ne arată că pentru orice $0 \leq q \leq 1$ $0 \leq r \leq 1$, avem

$$0 \leq a_{ij} + b_{ij}q + c_{ij}r \leq 1 \quad i, j = 0, 1$$

ceea ce implică :

$$0 \leq a_{ij} \leq 1; \quad 0 \leq a_{ij} + b_{ij} \leq 1; \quad 0 \leq a_{ij} + c_{ij} < 1; \quad 0 \leq a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} < 1 \quad (36')$$

Domeniul Δ este de data aceasta inclus în R^3 . Pentru $\bar{p}, \bar{q} \in \Delta$ alegem distanța :

$$\rho(\bar{p}, \bar{q}) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + |p_3 - q_3|$$

Condiția 2° este deci satisfăcută dacă

$$\begin{aligned} |b_{11}| + |b_{10}| &< K_1 \\ |c_{01}| + |c_{00}| &< K_2 \end{aligned} \quad (37)$$

unde K_1 și K_2 sînt numere pozitive mai mici sau egale cu 1, iar unul dintre ele este strict mai mic decît 1, și dacă în plus funcțiile $\varphi_1(\bar{p})$, $\varphi_2(\bar{p})$ admit derivate de primul ordin în raport cu p , mărginite în intervalul $0 \leq p \leq 1$, respectiv de numerele :

$$\frac{K_1 - |b_{11}| - |b_{10}|}{1 - K_1 + |c_{11}| + |c_{10}|}, \quad \frac{K_2 - |c_{01}| - |c_{00}|}{1 - K_2 + |b_{01}| + |b_{00}|} \quad (38)$$

În sfîrșit condiția (4), se reduce la aceea pentru care un lanț $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ definit de relațiile :

$$u_{n+2} = a_{11} + b_{11}u_n + c_{11}u_{n+1}$$

$$v_{n+2} = a_{00} + b_{00}v_n + c_{00}v_{n+1}$$

să fie convergent.

Este necesar ca rădăcinile ecuațiilor :

$$x^2 - c_{11}x - b_{11} = 0$$

$$x^2 - c_{00}x - b_{00} = 0$$

să fie mai mici decît 1, ceea ce implică condițiile :

$$b_{11} + c_{11} < 1$$

$$b_{00} + c_{00} < 1$$

$$b_{11} - c_{11} < 1$$

$$b_{00} - c_{00} < 1$$

care sînt consecințe ale relațiilor (36').

Condiția 4° este verificată dacă condiția 2° este verificată.

Principiul ergodic este prin urmare valabil dacă sînt satisfăcute relațiile exprimate de (36'), (37), (38).

§ 5. Reducerea la un lanț simplu

Din relația funcțională (9) deducem :

$$P_i^{(n+1)}[\bar{p}, \bar{q}(\bar{p})] = \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} P_j \varphi_{jk} P_i^{(n)}[\bar{\varphi}_{jk}(\bar{p}), \bar{\varphi}_j(\bar{p}), \bar{\varphi}_k(\bar{q}_j(\bar{p}))] \quad (39)$$

Această relație este de aceeași natură ca și în cazul unui lanț simplu :

$$P_i^{(n+1)}(\bar{p}) = \sum_{j=1}^{m+1} P_j P_i^{(n)}[\bar{f}(\bar{p})]$$

unde

$$\bar{f}(\bar{p}) = \{f_1(\bar{p}), f_2(\bar{p}), \dots, f_m(\bar{p})\}$$

este o funcție dată de $\bar{p}$.

Diferența este că relația de recurență (39) se referă la două valori consecutive ale lui n , ceea ce nu constituie o dificultate pentru demonstrarea teoremei ergodice. Putem deci aplica relației (39) metoda aplicată unui lanț simplu. Condițiile suficiente pe care le-am găsit pentru a asigura valabilitatea teoremei ergodice, sînt mai complicate și mai restrictive în cazul lanțului linear. Deci metoda directă care utilizează relația funcțională este preferabilă.

BIBLIOGRAFIE

1. Onicescu O., G. Mihoc: *Sur les chaînes de variables statistiques*. Bull. Sci. Math., 59, 174—192 (1935).
2. Onicescu O., G. Mihoc: *Sur les chaînes statistiques*. C.R. Acad. Sci. Paris, 200, 511—512 (1935).
3. Onicescu O., Gh. Mihoc și colab.: *Calculul probabilităților și aplicații*. Ed. Acad. R.P.R., București 1956.
4. Pólya G.: *Sur quelques points de la théorie des probabilités*. Ann. Inst. H. Poincaré, 1, 117—161 (1930).
5. G. Ciucu., R. Theodorescu: *Procese cu legături complete*. Ed. Acad. R.P.R., (1960).

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ПРИМЕНЯЕМАЯ К ЦЕПЯМ С ПОЛНЫМИ И МНОГОЧИСЛЕННЫМИ СВЯЗЯМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Принимается во внимание цепь с полными связями второго порядка, с определённым количеством состояний и доказывается эргодическая теорема этой цепи. Далее, рассматривается линейный случай и возможность сведения цепи второго порядка к простой цепи.

THÉORÈME D'ERGODICITÉ POUR LES CHAÎNES À LIAISONS COMPLÈTES MULTIPLES

R É S U M É

On considère une chaîne à liaisons complètes d'ordre deux, stationnaire et finie et on démontre un théorème d'ergodicité pour cette chaîne. On examine ensuite le cas linéaire et la possibilité de réduire la chaîne d'ordre deux à une chaîne simple.

ÎNCEPUTURILE MATEMATICE ÎN ȚARA NOASTRĂ

N. MIHĂILEANU

În nota de față ne propunem să cuprindem într-o scurtă privire de ansamblu primele școli, primii profesori, primele manuale, primele perioade și primii cercetători în domeniul matematicii, în țara noastră, până la sfârșitul secolului trecut. Note judicioase, fragmentare, de istorie matematică românească au fost publicate deseori la noi, mai ales la vechea *Gazetă Matematică*, din îndemnul redactorului principal, Ion Ionescu. Cu diferite ocazii au apărut și unele încercări de sinteză. Ele sînt însă unilaterale, iar unele conțin afirmații inexacte. De altfel, această temă n-a fost reluată de foarte multă vreme și în general, ea nu este cunoscută de publicul nostru. Materialul bibliografic consultat fiind incomplet și în parte contradictoriu, nici nota noastră nu are un caracter definitiv.

*

*

*

Diferite documente răzlețe ne conduc să admitem că în țara noastră au existat școli de la organizarea administrativă a principatelor. Este probabil că în aceste școli, încă de la început erau predate primele elemente de aritmetică. Școli de un nivel mai înalt au apărut și ele îndată ce aceasta a fost posibil.

Provinciile noastre, supuse unor condiții istorice diferite s-au dezvoltat diferit. În Țara Românească și a Moldovei, deseori pustiite de năvălirile turcești și tătărești, primele forme de organizare ale activității colective pașnice erau mereu reluate de la început. Școala n-a fost uitată niciodată, dar ea nu avea condiții favorabile să se dezvolte. O școală mai înaltă a apărut prima oară într-o vreme de relativă stabilizare, în secolul al XVII-lea și în contact cu puternicul centru cultural al Kievului. După modelul academiei din Kiev, fondată de *Petru Movilă*, cu profesori, material didactic și tipografie adusă de acolo, a luat ființă din 1644, școala domnească a lui *Vasile Lupu*, de la Trei Ierarhi din Iași; limbile de predare erau slavona și greaca. Este probabil că în cadrul cursului de filozofie să se fi predat acolo și noțiuni de aritmetică, geometrie și cosmografie ¹.

¹ Xenopol [7] p. 60; Urechiă [1] p. 8; Giurescu [1] p. 916; Cihodaru [1] p. 15.

Școala aceasta a prins fiindcă se formase de pe atunci un mediu cult, educat în străinătate. Din acest mediu, în parte datorită și școlii de la Trei Ierarhi, s-au ridicat multe personalități proeminente, cu cunoștințe multilaterale, dintre care nu lipseau uneori nici matematicile.

Niculae Milescu Spătaru (probabil 1637—1708) a fost, de exemplu, un savant de factură europeană, al secolului al XVII-lea. El și-a început probabil studiile la școala domnească din Iași și le-a continuat la Constantinopol. Este posibil să fi frecventat și o universitate italiană, unde să fi învățat matematicile. Spătaru a scris în 1672 la Moscova, în slavonă, *Aritmologia*, o lucrare filozofico-morală, plină de numere fatidice¹.

Este probabil ca însuși marele erudit *Dimitrie Cantemir* (1673—1723) să fi posedat cunoștințe matematice².

Fiul lui, *Antioh Cantemir* (1709—1744) dezvoltat în Rusia este de asemenea o personalitate culturală complexă. Ca ambasador al Rusiei la Londra, apoi la Paris, îl ținea în curent pe *Euler*, de la Petersburg, cu matematicienii din occident. El a compus, în limba rusă, un manuscris de algebră³.

Școala domnească din Iași n-a avut răgazul necesar să-și îndeplinească misiunea ei culturală, un timp mai îndelungat.

În Ardeal, căruia zidul de apărare al Principatelor Române îi asigura o viață normală, au existat în afara școalei elementare, vechi colegii confesionale cu o frumoasă tradiție, dar despre care avem prea puține date. Importantă este universitatea catolică din Cluj, din 1581, echivalentă cu cele din occident și organizată la fel: limba de predare, latină; profesorii iezuiți; trei facultăți. Facultatea de filozofie cuprindea și cursuri de matematici. Universitatea a durat 24 de ani, pînă la izgonirea catolicilor din Cluj.

În 1622 s-a înființat un colegiu universitar la Alba Iulia, cu aceeași structură, numai că propaganda era făcută acum, în favoarea bisericii protestante. Acest colegiu superior a avut o perioadă de înflorire mai ales sub conducerea lui *I. Alsted* (1588—1638), primul matematician de seamă, care a trăit în țara noastră⁴. Colegiul a fost distrus în 1658, în urma unei năvăliri a turcilor din Banat⁵.

În 1693 s-a reînființat universitatea iezuită din Cluj, care a durat pînă în 1773, cînd s-a desființat acest ordin religios. Dintre profesorii mai de seamă ai universității cităm pe *N. Ianoși* (1701—1741), *M. Hell* (1720—1790)⁶.

Din cauza caracterului lor de propagandă confesională, școlile superioare din Ardeal n-au fost frecventate decît în cazuri excepționale, de

¹ Bolșaiia sovetkskaia Entiklopedia, vol. 40, 1957, p. 250—51; Xenopol [8] p. 193; Picot [1], Cartoian [2] p. 129, Bărbulescu [1], Cristescu [1].

² Xenopol [8] p. 187, Iorga [4], p. 334, Ionescu [2], Călinescu [1] E. St. Iacob. Gaz. Mat. 51, 1946, p. 673.

³ Bolș. sov. Ent. vol. 20, p. 28. Ehrhard [1], Ionescu [8].

⁴ Poggendorff, 1, 1863, p. 34. Marian [1].

⁵ Iorga [3].

⁶ Poggendorff, 1, p. 1055, 1191, Marian [2].

către români. Unii din ei au dovedit aptitudini deosebite, de exemplu *Gavril Ivul* (1619—1678) care a fost profesor la Kosice și Viena, unde a predat și matematici¹.

* * *

Din mijlocul secolului al XVII-lea a început o puternică propagandă italiană asupra orientului cu scopul unificării celor două biserici, în schimbul unor concesii de dogmă din partea ortodoxilor. Italia a deschis porțile universităților ei pentru străini, ca să-i convertească. În universitățile italiene, pe lângă multă teologie erau predate și studii umaniste și, cu rol secundar, și științele naturii, printre care matematicile. Aceste universități au fost frecventate și de unii fii de boieri de la noi, de exemplu cunoscutul cronicar *Constantin Cantacuzino* (~1650—1716), care relatează că a studiat geometria la Padua².

Acest pelerinaj spre Italia era și mai puternic în țările care erau și mai oprite de stăpânirea înapoiată, turcească. Parte din tineretul naționalităților asuprite din imperiul otoman respira un aer mai liber în orașele Italiei, unde venea în contact cu civilizația occidentală. Propaganda iezuită a dus însă la reacțiunea contrară. Se simțea nevoia creării de academii similare, dar în spiritul religiei ortodoxe și cât mai îndepărtată de cenzura nesuferită a Stambulului. Locul academiilor ortodoxe era în Principatele Române, care căzuseră sub influența grecească.

În București, *Șerban Cantacuzino* a înființat în 1679 o academie, cu limba de predare greaca veche, considerată în orient — ca și latina în apus — ca singurul mod de exprimare al studiilor înalte. Localul academiei era mănăstirea Sf. Sava, în fața universității de astăzi. În afara noțiunilor elementare din primele clase, în această academie erau predate și cunoștințe mai înalte de fizică și matematici. Din 1714 a luat ființă și academia grecească din Iași. Aceste academii au durat fără întrerupere, dar cu unele perioade de delăsare, circa 150 de ani.

Ele au jucat un rol esențial pentru greci și sînt importante și pentru noi, fiindcă au fost frecventate și de români și fiindcă de acum se introduce în mod definitiv învățămîntul științific în țara noastră. Academiile grecești din București și Iași sînt superioare multor școli contemporane din orient.

Profesorii greci ai acestor academii erau în bună parte savanți renumiți ca *Manase Eliadis*, *Iosif Mesiodax*, *Ion Comnen*, *Nicolae Cercel*, *Grigore Constanda* etc. Ei preferau principatele noastre, patriei lor, tocmai fiindcă aici se bucurau de mai multă libertate.

Dintre elevii academiilor grecești cel mai de seamă este *Hrisant Notara*. După terminarea școlii, el a fost trimis de *Constantin Brîncoveanu* la Padua, apoi la Paris, unde a studiat și astronomia. Acolo a tipărit în limba greacă, în 1716, o geografie matematică în care sînt determinate coordonatele Bucureștiului și Tîrgoviștei. Ajuns patriarh la Ierusalim, *Notara* a continuat să trăiască mai mult la București, de a cărui viață culturală s-a preocupat intens.

¹ Iorga [2] p. 89. Cartoian [2] p. 107. Relativ la Universitatea din Cluj, date mai complete în Istoria Romîniei, II, 1962, p. 1038; Marian [1], [2].

² Cartoian [3] p. 263.

Academiile grecești au însă și lipsuri care au apăsătorit cu timpul tot mai greu.

În general, ele dădeau rezultate slabe. După ani de studiu anevoios al limbii eline (vechi) se pierdea mult timp cu controverse sterile gramaticale și etimologice. În modul acesta, ele rămâneau în urma necesităților societății în dezvoltare, care impunea să se accentueze învățămîntul științific. Țara avea nevoie grabnic de ingineri, pe care academiile grecești nu-i produceau. În adevăr, cerealele principatelor erau tot mai căutate de piețele din apus și moșierii erau tot mai interesați să extindă producția agricolă deci să delimiteze precis, latifundiile. Burghezia avea nevoie de tehnicieni, iar academiile și așa cum erau, erau numai pentru boieri, refractari la o îndeletnicire activă.

Judecînd școala după roadele ei observăm că cultura grecească, impusă în țările noastre pentru a sprijini o conducere străină, a dispărut o dată cu ea și practic, în pragul trecerii noastre în etapa modernă nu aveam nici măcar dascăli pentru învățămîntul primar¹.

*
* *

Cu încetarea stăpînirii fanariote, academiile grecești care stăteau în calea intereselor clasei ascendente erau condamnate. Lovitura decisivă le-au dat-o *Gh. Asachi* în Moldova și *Gh. Lazăr* în Muntenia, cîtorii învățămîntului științific românesc.

Meritul marilor dascăli *Asachi* și *Lazăr* este acela că ei aveau pregătirea tehnică necesară, și-au dat seama de tendințele progresiste ale societății de atunci și s-au pus cu devotament în serviciul lor, luîndu-și sarcina de a forma ingineri hotarnici, în școală românească².

Gh. Asachi (1788—1869) figură culturală complexă a dominat prima jumătate a secolului al XIX-lea. După o studenție prelungită la Liov, unde a învățat arhitectura; la Viena unde a urmat și cursuri de astronomie și la Roma, întors în țară a predat matematicile în limba română, din 1814, în cadrul academiei grecești din Iași. *Asachi* este primul profesor care a predat în românește, un curs teoretic complet de matematici. În 1818 școala lui *Asachi* a dat primii ingineri topografi autohtoni, dintre care unii au practicat efectiv, meseria. Misiunea lui *Asachi* a fost grea. Rivalul lui, profesorul școlii grecești *D. Gobjela*, român macedonean, avea o pregătire științifică superioară³, dar susținea o cauză pierdută. Erau apoi severe greutăți inerente începutului: lipsa unui vocabular științific, lipsa manualelor, lipsa interesului autorităților. Pe primele le-a învins *Asachi* singur; cu ultima a luptat toată viața⁴.

Gh. Lazăr (probabil 1779—1823) a studiat politehnica la Viena. În 1818 el a deschis în București, la Sf. Sava prima școală românească modernă,

¹ Date despre academiile grecești în Xenopol [9] p. 186, [10] p. 167; Erbiceanu [2]; Iorga [1] p. 26, [2] p. 68, 105; Urechiă [1] p. 14; Cihodaru [1]; Bîrsănescu [2].

² Urechiă [1] p. 108.

³ Popa [2].

⁴ Relativ la *Asachi*, de cercetat Xenopol [10] p. 269; Iorga [2] p. 161; Ionescu [2] p. 23; Călinescu [1] p. 96—104, Lăvescu [1] p. 429.

din Muntenia. *Lazăr* a ridicat treptat nivelul lecțiilor de matematici, pînă la cunoștințele necesare unui inginer; elevii lui s-au entuziasmat să vadă că matematicile pot să fie predate în limba românească și în plus au un caracter practic. Deși școala lui *Lazăr* a început modest, faima ei a crescut repede. Mare parte din elevii academiei grecești au părăsit școala lor și au devenit elevii lui *Lazăr*. Munca lui *Lazăr* a avut succes; elevii lui au învățat să facă planuri și măsurători¹.

*

* *

Prima școală românească de nivel mediu este seminarul din Blaj, din 1754. Prin actul de unire religioasă de la 1700, românii au obținut dreptul să înființeze școală românească și să trimită anual trei bursieri la Roma. Uniții au luptat totuși mult ca să se respecte aceste condiții. Seminarul din Blaj a înflorit repede și a jucat un rol considerabil pentru românii din Ardeal. Limbile de predare erau romîna și latina. Cel dintîi profesor al seminarului a fost *Grigore Maior* (1715—1785), doctor în teologie și filozofie de la Roma. Este posibil ca el să fi ținut și lecții de aritmetică². *Samuel Micu* (1745—1806) a fost de asemenea profesor la Blaj și a predat printre altele și matematici³ ca și *Gh. Șincari*⁴. Este probabil că învățămîntul matematic era redus, dat fiind caracterul școlii⁵.

Demn de relevat este și crearea școlilor normale grănicerești din Năsăud (1778) și Caransebeș. Limba de predare era germana, dar școlile erau susținute de comunitatea românească din aceste regiuni, care se bucura de oarecare drepturi, în schimbul întreținerii cîte unui regiment de localnici. Școlile acestea trebuie să fie considerate de nivel mediu, fiindcă absolvenții lor deveneau învățători în diverse comune românești⁶.

Școli normale și teologice au mai existat la Timișoara (1776)⁷, Suceava (1783)⁸, Oradea (1792)⁹, Socola (1804)¹⁰, Sibiu (1811)¹¹.

O importanță deosebită o are Preparandia (școala normală) din Arad, din 1812. Școala avea la înființare patru profesori pe specialități. Matematicile erau predate de *Iosif Iorgovici* (~1792—1820), doctor în filozofie din Viena. I-a urmat *Al. Gavra* (1797—1884), profesor peste o jumătate de veac¹².

¹ Relativ la *Lazăr*: Eliade [1], Poienaru [1], Xenopol [10] p. 254, Iorga [2], p. 164, 175, Lalescu [1], Ionescu [1], Călinescu [1], Macovescu [1].

² Papiu [1] p. 2, Rațiu [1] p. 10.

³ Bianu [1], Rațiu [1] p. 18.

⁴ Papiu [1], Rațiu [1] p. 15, 30.

⁵ Despre seminarul din Blaj: Xenopol [10] p. 235, Iorga [3] p. 447—55, Călinescu [1] p. 68, Rațiu [1], Georgescu [1], Marian [13], Anuarul Liceului Blaj, 1944.

⁶ G. Moisil [1], Șotropa & [1].

⁷ Vuia [1].

⁸ Polek [1].

⁹ Tămăianu [1].

¹⁰ Ghibănescu [1].

¹¹ Sima [1].

¹² C. Diaconovici Loga: Epistolarul românesc. Buda 1841, p. 380, Iorga [5], p. 293, 426; Vuia [2], Botiș [1].

A doua școală românească, cu caracter teoretic este gimnaziul din Beiuș, din 1826¹. Școala comercială din Brașov, din 1835 este prima de acest fel, de la noi.

*

* *

În Muntenia, după plecarea lui *Lazăr*, școala a rămas cîtva timp neglijată. Atunci *I. Eliade Rădulescu* (1802—1872) și-a luat benevol sarcina continuării cursurilor; prea tînăr, fără o pregătire științifică deosebită *Eliade* a condus cîtiva ani școala din București, deseori predînd singur toate materiile. Ulterior, alături de *Eliade* a activat cîtva timp, ca profesor de matematici și inginerul *Răducan Măinescu*, fost de asemenea elev al lui *Lazăr*.

Încă din 1820, pentru a-l ajuta și continua pe *Lazăr*, eforia școalelor a trimis patru bursieri la studiu în Italia și apoi în Franța. Pentru matematici, speranțele erau puse în *I. Pandeli*, cel mai bun elev al lui *Lazăr*. În 1823 el a trimis atestatul de studii strălucite de la Piza și a cerut să i se permită continuarea cursurilor la Paris. Ajuns însă acolo, *Pandeli* a constatat o prea mare diferență între cunoștințele lui și nivelul cursurilor predate. Îngrijorat că nu va corespunde și de fire bolnăvicioasă, într-un moment de descurajare s-a sinucis².

Eforia a pretins ca ceilalți bursieri să studieze matematicile, să nu rămînă descoperită catedra cea mai importantă. *Simeon Marcovici*, care se dedicase pînă atunci literelor și-a luat sarcina aceasta și la înapoiere în țară a predat matematicile între 1827—30³.

Eforia școalelor, în dorința de a forma un profesor de matematici specialist, l-a însărcinat pe *Petrache Poienaru* (1799—1875) să studieze matematicile la Viena. *Poienaru* a continuat studiile teoretice și practice la Paris și la Londra. Din 1832, întors în țară, el a funcționat puțin timp la catedră, fiind chemat în posturi de mai mare răspundere. Pe o lungă perioadă, *Poienaru* a fost factor hotărîtor în toate problemele de învățămînt și de tehnică⁴.

La Sf. Sava, din 1830, matematicile au fost predate mai multă vreme de *Gh. Pop*. Din 1833 s-a adăugat *D. Pavel*.

În Moldova, pentru întărirea învățămîntului, *Asachi* a adus profesori din Ardeal. Pentru matematici a venit în 1820 *V. Bob* (1795—1836)⁵. În 1830 *Asachi* a fondat gimnaziul Vasilian, profesor de matematici fiind *Bob*. În 1834 s-a redeschis seminarul Socola, profesor de matematici fiind *Andrei Teodorescu*.

*

* *

În 1835, din inițiativa lui *Asachi*, școala vasiliană din Iași a fost transformată în Academia Mihăileană. Cursul de matematici aplicate la inginerie a fost ținut de maiorul rus *M. Singurov*, iar un curs de geometrie aplicată,

¹ Dejeu [1].

² P. Eliade [1] p. 215—237; Bănescu [1]; Iorga [2] p. 180, Ionescu [73].

³ Lalescu [2], [3].

⁴ Odobescu [1], Ionescu [2] p. 4, 30, 41, 65; Eliade [1] p. 238—43; I. Simionescu [1].

⁵ Xenopol [13] p. 150; Călinescu [1] p. 111—12; Rațiu [2].

de arhitectul *Freiwald*. Între timp, *Asachi* a trimis la studii la Viena, pe *T. Stamati* (1812—52), *Al. Costinescu*, *A. Velini*, care au predat apoi matematicile la academie. *Costinescu* — inginer — a predat din 1838 geometria analitică, geometria descriptivă și mecanica aplicată. El este primul profesor care a predat un curs de matematici superioare, în țara noastră.

Academia din Iași era un complex școlar: studiile efectiv academice erau predate în trei facultăți; în cadrul facultății de filozofie se studia și algebra și geometria. Mai exista un curs extraordinar, de geometrie practică, de trei ani, în care erau programate calculul diferențial și integral, geometria analitică și descriptivă, cu scopul de a produce ingineri. Academia s-a dezvoltat mereu. În 1842 a venit ca profesor și *I. Ghica* (1816—97); el a predat probabil și unele lecții din teoria conicelor¹.

Cu tot nivelul ridicat al unor cursuri, este totuși exagerat să se socotească Academia din Iași o universitate².

Prima universitate românească a fost creată la Iași, în 1860, de *Al. Cuza*, la recomandarea lui *M. Kogălniceanu*. Universitatea avea patru facultăți. Facultatea de științe a început cu *Al. Călinescu*, care a predat algebra superioară și calculul diferențial și integral, până în 1862; cu *Șt. Emilian Kertesz* (1819—99), inginer de la Viena, care a predat geometria descriptivă până în 1892; cu *I. Pop* (1829—65), inginer de la Viena, care a predat geometria analitică și trigonometria sferică până în 1865³.

Profesori la universitatea din Iași, cu o îndelungată activitate didactică, până la 1900 au fost *N. Culianu* (1832—1915), licențiat de la Paris, care a predat calculul diferențial și integral, apoi astronomia⁴; *I. Melic* (1840—89), licențiat și inginer de la Paris, care a predat calculul diferențial și integral; *M. Toni* (1843—98) licențiat și inginer de la Paris, care a predat mecanica; *C. Climescu* (1844—1926) licențiat de la Paris, care a predat geometria analitică, *I. Ralet* (1851—1916), licențiat de la Paris, inginer de la Strassbourg, care a predat teoria funcțiilor⁵.

Alți profesori de matematici ai universității, în secolul trecut au fost *G. Roșu*, *V. Costin*, *E. Pangrati*.

Facultatea de științe avea la început un program comun. Din 1864 s-a creat o secție de matematici, în general slab frecventată. Primul licențiat în matematici datează din 1874⁶.

*
* *

Și în București, primele cursuri de matematici superioare au precedat universitatea. În 1854, la cursul de inginerie civilă de pe lângă colegiul Sf. Sava, *Al. Orăscu* predă geometria descriptivă și *Em. Constantinescu*

¹ Ghica: Scrisoarea din 20 iunie 1881 către Alecsandri. vol. Opere I București 1956; p. 200; G. Călinescu [1] p. 333.

² Urechia [1], [2], [4], Ionescu [65], Cîmpan [6], Popovici [1].

³ Cazanacli [3].

⁴ Lalescu [4].

⁵ Myller [6].

⁶ Despre universitatea din Iași: Myller [7], Popa [1], Berlescu [1].

geometria analitică¹. Este probabil că aceste cursuri datau mai de mult. Ele au continuat și s-au dezvoltat. În 1857, *Em. Constantinescu* predă mecanica și *Gr. Joranu*, geometria descriptivă aplicată. În 1862 *Em. Bacaloglu* ținea un curs de algebră superioară și de analiză.

Facultatea de matematici din București a fost înființată de *Al. Cuza*, la propunerea lui *Al. Odobescu*, în 1863, în cadrul Școalei superioare de Științe. Profesori de matematici erau *Al. Orăscu* (1817—94), arhitect de la Berlin, care a predat geometria descriptivă, până în 1892; *D. Petrescu* (1831—96), licențiat de la Paris, care a predat geometria analitică, până în 1881 și astronomia (1865—95); *I. Fălcoianu* probabil primul român licențiat în matematici, în 1857, de la Paris², care a predat calculul diferențial și integral.

În 1864, diferitele facultăți au fost reunite într-o universitate.

Profesori de matematici, cu o îndelungată activitate didactică, în secolul trecut au mai fost: *E. Pangrati* (1864—1931), inginer din Paris, care a predat geometria descriptivă (1894—1931); *C. Gogu* (1854—97), doctor de la Paris, care a predat geometria analitică (1881—97); *G. Țițeica* (1873—1939), doctor de la Paris, care a predat geometria analitică (1897—1938); *I. Lahovari* (1846—1907), inginer de la Paris, a fost profesor de calcul diferențial și integral (1871—1901); *D. Emanuel* (1854—1941), doctor de la Paris, care a predat analiza și teoria funcțiilor (1882—1928); *Sp. Haret* (1851—1912), doctor în matematici de la Paris, care a predat mecanica (1878—1910); *N. Coculescu* (1866—1952), doctor de la Paris, care a predat astronomia (1896—1937).

Alți profesori de matematici ai universității, în secolul trecut au fost: *E. Angelescu*, *N. Urechia*, *M. Ianculescu*, *P. Suchar*, *P. Coculescu*, *A. Ioachimescu*, *G. Kirilov*, *D. Bungețeanu*.

Matematicile au fost predate până recent, ca o secție a facultății de științe.

Începând cu 12 studenți, ai întregii facultăți și cu trei profesori de matematici, secția de matematici s-a dezvoltat mereu³.

*

* *

În afara universităților din Iași și București, cursuri de matematici superioare au fost predate și în alte institute de învățământ.

Școala de Poduri, Șosele și Mine, care funcționează în București din 1867—după multe încercări întrerupte—a avut ca profesori de matematici superioare pe *D. Petrescu*, *E. Bacaloglu*, *G. Kirilov*, *S. Haret*, *D. Emanuel*, *C. Gogu* de la facultate și numeroși ingineri cu studii speciale ca *E. Angelescu*, *M. Capuțineanu*, *N. Urechia*, *C. Mănescu* etc. În 1877—78 politehnica a fost atașată universității pentru cursurile paralele de matematici. Se predă la politehnică algebra superioară, trigonometria sferică, geometria analitică, calculul diferențial și integral, mecanica, geometria descriptivă⁴.

¹ Urechia [3].

² P. Eliade [2].

³ Anuarele Universității din București (1892—1901), Mihăileanu [2].

⁴ Ionescu [2].

Studentii secției de fizico-chimice de la facultatea de științe urmau și ei unele cursuri de matematici, cu aceiași profesori.

În 1880, pe lângă universități a fost creată o Școală normală superioară, pentru mai buna pregătire a profesorilor de liceu. Din 1884 s-a creat o secție pentru matematici. În Iași au fost profesori de matematici la Școala normală superioară *C. Climescu* și *M. Toni*¹. În București: *C. Gogu*, *D. Emanuel*, *N. Urechia*. Din 1898 aceste școli au fost desființate.

În 1872 s-a reînființat universitatea maghiară din Cluj. Profesori de matematici au fost *Samuel Brassai* (~1797—1897), doctor în filozofie, pentru matematici elementare²; *Lajos Martin* pentru calcul diferențial și integral și astronomie; *J. Farkas* (1847—1930), doctor în filozofie pentru mecanică, *M. Réthy*, pentru algebră.

La Școala superioară de arhitectură, înființată în 1896, primii profesori de matematici superioare au fost *E. Pangrati*, *G. Kirilov*.

În unele școli militare se dădea de asemenea o atenție deosebită matematicilor, făcându-se apel la profesorii de la universități și la ofițerii cu înaltă calificare în studiile tehnice. Erau predate din 1872, cursuri de algebră superioară, geometrie analitică, analiză, mecanică, geometrie descriptivă și geodezie.

*

* *

Primele cărți de matematici tipărite pe teritoriul țării noastre sînt: o cosmografie, la tipografia *Honterus* din Brașov, din 1548³, o aritmetică maghiară, la Cluj, din 1591; o altă aritmetică maghiară la Alba Iulia, în 1632; o altă aritmetică maghiară, a lui *Tolvai*, la Cluj, în 1703; o trigonometrie latină, a lui *Gooden*, retipărită la Cluj, în 1737; o carte latină de arhitectură militară, pe bază de geometrie a lui *Vols*, retipărită în Cluj, în 1738; o traducere latină a geometriei lui *I. Pardies*, la Cluj, în 1744; *Elementa Mathematica*, primul manual original de matematici de la noi, al lui *M. Hell*, la Cluj, în 1755; o aritmetică latină, a lui *G. Scott*, retipărită la Cluj, în 1765; o traducere latină a Compendiului lui *Cr. Wolff*, la Cluj, în 1773⁴.

Prima carte de matematici, în care apare și text românesc este Aritmetica germano-română, tipărită la Viena, în 1777. Titlul german al cărții este *Anleitung zur Rechenkunst*, iar cel românesc: *Ducere de mină către aritmetică*. Manualul este destinat școlilor primare. Autorul este *Felbiger*, iar traducător, probabil sîrbul *T. Iancovici*; stilul este greoi. Cartea a mai fost reeditată în 1782, 1785⁵.

Prima carte românească de matematici este aritmetica lui *G. Șincai*: *Indreptare către aritmetică*, tipărită la Blaj în 1785, cu litere cirilice. Cartea tratează numerele întregi, fracțiile ordinare și regula de trei⁶.

¹ Bogdan [1], Berlescu [1].

² Poggendorff [3], [4].

³ Ionescu, *Gaz. Mat.* 41, 1935, p. 96.

⁴ Marian [2], [5], [6], [7], [8], [9].

⁵ Ionescu [26], Marian [15].

⁶ Ionescu [26], Marian [17].

Este posibil ca în același timp, A. Marchi să fi tipărit și el o aritmetică românească la Viena¹.

Prima carte de matematici tipărită în principate este intitulată : Elemente aritmetice arătate firești, a lui *Amfilohie*, apărută la Iași în 1795. *Amfilohie Hotiniul* a fost elev al școlii grecești, apoi bursier la Roma. Aritmetica aceasta este superioară modelelor italiene folosite și este scrisă atrăgător. În afară de aritmetică sînt introduse și primele noțiuni de geometrie². Este posibil ca *Amfilohie* să fi publicat și o ediție anterioară³.

În 1805 a apărut la Budapesta o aritmetică română anonimă : Povățuire către Învățătura Socoatei, a lui *Gr. Obradovici*⁴.

Mai importantă este aritmetica anonimă de la Buda, din 1806 : Povățuire către aritmetică, cu o largă circulație. Traducătorul este probabil *S. Micu*⁵. Cartea a fost retipărită în 1822⁶.

În București prima carte de matematici tipărită este o Aritmetică teoretică a lui *L. Francoeur*, tradusă de *I. Eliade Rădulescu*, în 1832. Cartea tratează și progresele și logaritmii⁷.

În 1833 a apărut în București o aritmetică prescurtată a lui *G. Pop* retipărită într-un foarte mare număr de ediții, pînă după 1880.

G. Asachi a scris la Iași o lucrare remarcabilă : Elemente de matematică. Volumul întâi, tipărit în 1836 conține aritmetica ; volumul al doilea, din 1837, cuprinde algebra ; iar volumul al treilea, din 1838, geometria. Aritmetica conține și progresele aritmetice, analiza combinatorie. Algebra — prima algebră tipărită în limba română — tratează materia pînă la ecuațiile de gradul al doilea. Geometria este una dintre cele *mai moderne cărți contemporane*. Cărțile lui *Asachi* sînt originale și alcătuite cu competență⁸.

În 1836, *Karl Walstein* a tipărit Elemente de Desen și Arhitectură, carte care conține unele construcții geometrice⁹.

Prima geometrie tipărită în limba română, în București, 1837, este o traducere anonimă a Elementelor lui Legendre, datorită lui *P. Poienaru*. Cartea conține, în afara materiei obișnuite astăzi, unghiurile poliedre și geometria sferei¹⁰.

În 1838 *Dionisie Romano* a publicat o aritmetică la Buzău.

În 1839 a apărut la București a treia geometrie, Geometrie practică, a lui Moș Pătru, datorită lui *Al. Marin*¹¹.

În 1839 *A. Teodorescu* a tipărit aritmetica predată de el la seminarul Socola. Cartea este în parte, originală. Ea conține și extragerea rădăcinii cubice¹².

¹ Polek [1], I. Sbiera : Anton de Marchi, în Enciclopedia română Sibiu, vol. III, p. 199.

² Stadnițki [1], Ionescu [27], Popa [3], [1], Birsănescu [2].

³ Iarcu [1] p. 18.

⁴ Marian [15].

⁵ Iorga [5] p. 334, Marian [15].

⁶ Crișan [1].

⁷ Ionescu [28].

⁸ Cîmpan [3], [4], Cazanacii [2].

⁹ Ionescu [32].

¹⁰ Ionescu [27].

¹¹ Ionescu [27].

¹² Myller. Gaz. Mat. 40, 1935, p. 364.

Prima carte românească de trigonometrie a fost tipărită la București, în 1850 de D. P. (Pavel). Ea conține și trigonometria sferică¹.

Este posibil ca pînă la 1840 să fi apărut și alte cărți românești de matematici².

*

* *

În ceea ce privește programele școlare, trei legi fundamentale au stat la baza învățămîntului, în cursul secolului trecut.

a) Regulamentul organic, definitivat în 1832, care a reformat în sens progresist întreaga structură administrativă din țările romîne, a întărit și învățămîntul științific.

Regulamentul prevedea ca învățămîntul de toate gradele să devină public pentru ambele sexe, școlile elementare gratuite. Erau preconizate patru categorii de școli: începătoare (de patru ani), umanioare (de patru ani), complementare și speciale.

Învățămîntul matematicilor începea din clasa a doua a școlilor elementare; iar la secția de matematici aplicate a școlilor cu cursuri speciale urma să se învețe algebra superioară, calculul diferențial și integral, geometria analitică și descriptivă, mecanica, geodezia.

Prevederile regulamentului organic au fost aplicate treptat³.

b) Legea lui Cuza din 1864 decreta învățămîntul primar obligator și gratuit. Învățămîntul mediu cuprindea: licee, gimnazii, seminarii, școli reale (de meserii), de arte, profesionale și școli secundare de fete. Liceele durau 7 ani, iar gimnaziile, 4.

Legea lui Cuza a suferit numeroase ajustări și eludări de la principiile ei democratice, dar în general ea a fost legea fundamentală a organizării școlilor românești, pînă la sfîrșitul secolului.

Programele de matematici pentru licee erau încărcate; în clasa a doua se predă algebra pînă la ecuații de primul grad; în clasa a treia la aritmetică se scotea rădăcina cubică; clasa a IV-a cuprindea un studiu dezvoltat al triedrelor și al geometriei pe sferă; în clasa a VI-a era studiată trigonometria sferică, aplicată în clasa a VII-a la astronomie⁴.

Din 1866 s-a introdus la noi sistemul metric; într-o lungă perioadă de tranziție, învățămîntul aritmeticii s-a îngreunat cu transformările din unitățile autohtone în cele noi.

Pe toate treptele învățămîntului, posturile didactice erau ocupate prin concurs.

c) Legea lui Haret, din 1898 completa liceele la 8 clase și le trifurca în cursul superior în secțiile: clasică, modernă și reală. În liceele reale se învăța aritmetică raționată, geometria modernă (raport anarmonic, pol și polare etc.), algebră superioară (combinări, derivate, determinanți,

¹ Ionescu [36].

² Iarcu [1], Lalescu [5].

³ Urechiă [1], Iorga [2], Ionescu [15].

⁴ L'enseignement public en Roumanie. București. 1900. P. Rășcanu [1] p. 67, Berlescu [1] p. 123.

serii, numere complexe, teoria dezvoltată a ecuațiilor), trigonometrie sferică, geometrie descriptivă, geometrie analitică, astronomie matematică¹.

Legea lui *Haret* a stat în linii mari, la baza învățământului vreo treizeci de ani.

Toate aceste programe dovedesc că în școala românească, de la începuturile ei, matematicilor li s-a dat o atenție deosebită.

*

* *

În a doua jumătate a secolului trecut, învățământul mediu s-a dezvoltat. În afară de București și de Iași s-au deschis gimnazii la Craiova (1851), Bîrlad (1858), Botoșani (1859). Apar noi gimnazii în București: Școala Centrală de fete (1852), Gh. Lazăr (1859), Matei Basarab (1860) și treptat în toate capitalele de județ.

În Ardeal apar de asemenea școli medii românești, îndată ce comunele obțin aprobarea pe care au solicitat-o cu stăruință, timp îndelungat. În 1850 se deschide liceul Andrei Șaguna din Brașov, centru românesc vestit de învățătură și tipar; din 1860 datează liceul din Suceava; din 1863 cel din Năsăud și treptat au fost înființate și alte școli medii, care fiind susținute de comunele românești, cu elevi români și profesori români trebuie să fie considerate românești, chiar dacă în anumite perioade, după fluctuațiile politicii împărăției austro-ungare față de numeroasele minorități, acestor școli le era impusă limba de predare germana sau maghiara. În Ardeal erau utilizate aproape exclusiv manualele cu caracter practic ale lui *Fr. Mocnik*; cărțile românești din acest timp sînt mai ales traduceri după el.

În principate încep să apară manuale personale, științific corecte și pedagogice ale autorilor români. Menționăm geometria lui *I. Melic*, din 1869 și trigonometria lui *Haret*, din 1873, ajunse la un foarte mare număr de ediții.

În învățământul mediu avem și profesori cu o bună pregătire și cu o activitate didactică frumoasă ca *D. Pavel*, *Gr. Joranu* în București, *I. Praja*, *G. Lucescu*, *Gr. Melidon* în Iași, *I. Virgolici* la Bîrlad, *N. Crapeleanu* în Ploiești etc; unii aveau o calificare superioară ca *Paul Tanco*, doctor în filozofie de la Gratz, în Năsăud²; *D. V. Isopescu*, cu studii de la Viena, la Suceava³; *I. Bozocanu*, cu studii de la Bruxelles, la Brașov⁴; *P. Pipos*, la Arad, deși profesor de pedagogie avea un doctorat în matematici de la Cluj⁵. Alți numeroși profesori, deși nu aveau studii înalte au rămas în amintirea elevilor lor ca pedagogi excelenți, ca *G. P. Constantinescu* la Craiova⁶. Profesor distins, spre sfîrșitul secolului a fost și *C. Du-*

¹ L'enseignement... p. 199. Lege asupra învățământului secundar și superior, București, 1898. Programa de studii pentru școalele secundare, București, 1899. Monitorul Oficial Nr. 128 din 11 sept. 1902.

² Mătieș [1].

³ Popa [8].

⁴ Marian [4].

⁵ Marian [3].

⁶ Tițeica [7].

mitrescu în București¹, etc. Demn de menționat este și *Vasile Petri* la Năsăud, învățător cu o bună pregătire, care a înființat revista de pedagogie Școala practică, în 1882 și a scris numeroase cărți gândite, de metodică aritmeticii².

Cu toate acestea existau și greutăți serioase : localurile școlilor erau insalubre, era lipsă de profesori, învățământul fetelor era depreciat.

*

* *

Primele cursuri românești tipărite de matematici superioare sînt :

Cursul de geometrie descriptivă, tradus după *Lefebvre de Fourcy* de *Al. Orăscu*, București, 1851. Un al doilea volum, litografiat conține epurele. Cursul tratează o teorie generală a suprafețelor și studiul detaliat al unor curbe și suprafețe: epicicloide sferice, iperboloidul cu o pînză, suprafețe desfășurabile etc³.

Primul manual românesc în care sînt introduse noțiuni de matematici superioare este intitulat : Elemente de Algebră, de *E. Bacaloglu*, autografiat în 1866 și tipărit în 1870, în București. În cartea aceasta apar pentru prima oară la noi fracțiile continui, derivatele, seriile, interpolările etc. Lucrarea lui *Bacaloglu* este personală și tratarea ei, modernă⁴.

Primul curs de matematici pentru învățământul superior, tipărit la noi, este intitulat : Lecții de calcul diferențial și integral, al lui *N. Culianu*, apărut în 1870 la Iași. În 1874 *Culianu* a tipărit a doua ediție a cursului. El a adăugat atunci și primele noțiuni de geometrie diferențială, din teoria curbelor.

În 1886 *Șt. Emilian* a tipărit un curs de perspectivă.

Primul curs tipărit de geometrie analitică este datorit lui *C. Climescu*, în 1898, la Iași. Volumul este de un înalt nivel științific, expunerea este îmbinată cu considerații de geometrie modernă. Conține numai geometria plană⁵.

În afară de aceste cărți tipărite au existat mai multe cursuri litografiate.

Din analiza conținutului acestor lucrări și după nivelul chestiunilor propuse la examene rezultă că din secolul trecut erau predate la noi cursuri complete și temeinice de matematici superioare, în înțelesul clasic al acestei noțiuni.

*

* *

Primul matematician din țara noastră, cu o frumoasă cultură în specialitate și cu lucrări personale este *Paul Sipoș* (1759—1816). A studiat la Göttingen și Viena și a fost profesor de matematici la Orăștie și Cluj. În Memoriile Academiei din Berlin, pe anul 1790—91, *Sipoș* publică dizertația sa despre un instrument matematic, inventat de el. Cu această

¹ I. Ionescu : Gaz. Mat. 44, 1938, p. 192. V. Ghițescu, idem, p. 83.

² Iuliu Moisil [1].

³ Botez [1].

⁴ Cîmpan [12].

⁵ Ionescu [39].

ocazie el face o aplicație remarcabilă a cohleoidiei la rectificarea elipsei. Această lucrare a fost premiată de Academia din Berlin. *Sipoș* este și autorul unei broșuri tipărită în 1807, în care propune un nou gen de tabele trigonometrice¹.

O personalitate excepțională este *Bolyai Farkas* (1775—1856); a studiat la Göttingen și a fost profesor de matematici la colegiul din Tîrgu Mureș (1804—51). A publicat la Tîrgu-Mureș mai multe manuale originale. De exemplu aritmetica sa din 1830 este o introducere în calculul diferențial, cu notații proprii. Lucrarea sa cea mai cunoscută este *Tentamen*, în două volume: 1832, 1833. Preocupat de fundamentarea logică a bazelor geometriei, *F. Bolyai* este un precursor al geometriilor neeuclidiene².

Bolyai Iános (1802—60) împarte cu *Lobacevski* gloria creării geometriei iperbolice. Lucrarea sa *Appendix*, scrisă la Timișoara, a fost tipărită la Tîrgu Mureș în 1831. *Bolyai* fiul admite că axioma de paralelism, formulată de *Euclid* poate să fie falsă și în această ipoteză se poate dezvolta o nouă geometrie. El introduce pe o cale directă oricicîl și orisfera, determină ariile și volumele și inițiază geometria diferențială³.

Prima lucrare cunoscută de matematici superioare, elaborată de un român este o broșură despre inversiunea seriilor, publicată în 1841, la München de inginerul *D. Asachi*, fiul lui *G. Asachi*⁴.

Primul autor român care publică lucrări originale de matematici este *E. Bacaloglu* (1830—91). Între anii 1859—63 *Bacaloglu* a publicat în periodicele europene, 16 note de matematici superioare, majoritatea de geometrie diferențială, contribuind la elucidarea unor probleme fundamentale, care erau atunci dezbătute.

În 1859, *Bacaloglu* a dat o nouă definiție curbării unei suprafețe, în sensul geometric al lui Gauss, dar făcînd reprezentarea sferică cu ajutorul normalelor secțiunilor normale. Dacă r_1, r_2 sînt razele principale de curbura ale suprafeței, curbura lui *Bacaloglu* are expresia

$$\frac{3}{8} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2^2} \right)$$

Această formulă admite o interpretare fizică în studiul fenomenelor capilare. Curbura lui *Bacaloglu* a fost regăsită ulterior de *E. Roger*. Semnificația ei a fost subliniată de matematicianul italian *Teraccini*.

Bacaloglu a studiat în alte lucrări sincronele unei familii de lemniscate, curbele și suprafețele podare, o nouă indicație a suprafeței, integralele binome, maximele funcției

$$\frac{\sin x}{x}$$

în legătură cu o problemă de difracție a luminii⁵.

¹ I. Woyciechowsky : Paul Sipoș. Budapesta. 1932. Gino Loria : Storia della matematiche. vol. III. Milano, 1933 p. 485.

² Schmidt [1], I. Toth [2], Al. Toth [1].

³ Schmidt [1], Mihăileanu [1], Neumann [1].

⁴ Popa [1].

⁵ Pogendorff, 3, Istrati [1], Myller [2], Cîmpan [7], [8], [9], [10], [11], Popa [7].

O atenție deosebită o merită o lucrare originală a lui *N. Șt. Botez*, autodidact. În 1872 *Botez* a publicat la Iași o broșură în care calculează suma termenilor unei părți a seriei armonice și face unele aplicații. Această contribuție românească atrage atenția matematicianului belgian *E. Catalan*, care publică mai multe note asupra ei¹.

*

* *

Este greu să întocmim un tabel al primilor doctori în matematici. În multe universități străine se acorda un doctorat general, în filozofie, în care erau incluse și matematicile. Este probabil că multe din aceste doctorate, care nici nu se publicau erau lucrări de sinteză, cu subiecte date de facultate.

Primele lucrări efective de doctorat, cu teme originale importante, publicate în periodicele de circulație europeană, ale cercetătorilor de la noi încep din ultimul pătrar al secolului trecut.

Spiru Haret a susținut în 1878 la Paris, prima teză românească de doctorat, despre perturbațiile orbitelor planetelor, demonstrând în sens contrar opiniei generale, că axele orbitelor planetelor nu sînt invariabile. *Laplace*, în 1773 și *Lagrange* în 1776 au arătat că forța perturbatoare conține numai termeni periodici de timp dacă se neglijează termenii de ordinul al doilea, în raportul maselor; *Poisson* a extins rezultatul în 1808, pentru termenii de ordinul al doilea. *Haret*, folosind unele simplificări aduse metodei de cercetare de *Tisserand*, în 1875 a descoperit termeni seculari ireductibili, de ordinul al treilea.

Teza lui *Haret* — ale cărei rezultate au fost făcute cunoscute în *Comptes Rendus*, Paris, din 1877 — a fost publicată la Paris, în 1878 și retipărită în 1883 de Observatorul din Paris. Rezultatul lui *Haret* a fost reluat și dezvoltat de *H. Poincaré*, *Tisserand*, *Eginitis* etc. Contribuția remarcabilă a lui *Haret* este citată în tratatele cele mai importante de mecanică cerească.²

David Emanuel a susținut în 1879, la Paris, a doua teză de doctorat, despre inversiunea integralelor abeliene. *Emanuel* a exprimat integralele abeliene de speța a treia cu ajutorul funcției θ a lui *Jacobi* și a regăsit simplu, din această exprimare, proprietățile cele mai importante ale integralelor abeliene.

Emanuel a mai publicat și alte lucrări relativ la funcțiile eliptice, mai mult cu caracter didactic.³

Const. Gogu a susținut în 1882, la Paris, doctoratul în matematici cu o teză relativ la o inegalitate lunară de lungă perioadă. Astronomul englez *Neison* a enunțat existența unei importante inegalități în longitudinea mijlocie a lunii, datorită planetei Marte. *Gogu* a dovedit că aproximațiile lui *Neison* sînt inexacte și a constatat că acțiunea planetei Marte

¹ Myller [4], [5], Popa [1].

² Jahrbuch. Berlin. 9. 1880 p. 790. Poggendorff, 3, p. 587, 4, p. 585, Coculescu [4], C. Popovici [1], Malița [1].

³ Jahrbuch, 11, 1881, p. 318. Myller [9], Stoilov [1].

este insensibilă. Teza a fost publicată în Analele Observatorului din Paris și a fost reprodusă în 1885 în Memoriile Societății engleze de astronomie. Ulterior, astronomul R. *Radau* a reluat problema, verificând rezultatul lui *Gogu*.

În 1884, *Gogu* a publicat o a doua notă, în Analele Observatorului din Paris, provocată de critica nejustă pe care astronomul american *Stockwell* o aducea teoriei lui *Delaunay* asupra mișcării lunii.

În 1892, *Gogu* a publicat în Analele Academiei Române o lucrare despre raza de curbură a cicloidei alungite.

Contribuția științifică a lui *Gogu* este citată în tratatul de Mecanică cerească al lui *Tisserand* și în *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*¹.

N. Coculescu și-a susținut doctoratul la Paris, în 1895 cu o teză despre termenii de ordin ridicat în dezvoltarea funcției perturbatoare.

Prima notă științifică a lui *Coculescu*, publicată în *Comptes Rendus*, Paris, 1892 se referă la stabilitatea mișcării în problema restrinsă a celor trei corpuri, corectînd un rezultat publicat de *Haerdtl*.

În teza publicată la Paris în 1895, ale cărei prime rezultate le-a făcut cunoscute din 1894 în C. R., *Coculescu* a completat unele cercetări indicate sumar de *Poincaré*, relativ la evaluarea termenilor din seria funcției perturbatoare, care pot să ia valori foarte mari, în cazul vitezelor unghiulare aproape comensurabile, ale planetelor. *Coculescu* s-a limitat la cazul în care traiectoriile sînt situate în același plan și a dat expresia finală a coeficienților respectivi.

Această contribuție românească remarcabilă, la una dintre cele mai dificile probleme din Astronomie, este citată de *H. Poincaré* în cursul său de Metode noi în Mecanica Cerească, vol. I².

P. I. Suchar (1869—1916) și-a susținut doctoratul la Paris, în 1897, cu o teză despre inversiunea integralelor eliptice. *Suchar* a inversat o funcție introdusă de *Elliot* și a cercetat domeniul în care această funcție este uniformă. El a reluat problema, în 1898, într-o notă din Buletinul Soc. Șt. din București. În același Buletin în 1900, *Suchar* a studiat forțele centrale în cazul în care odograful este o conică. În 1901 *Suchar* a mai publicat în C.R. Paris o notă despre ecuațiile diferențiale lineare cu coeficienți algebrici de speță a doua și a treia.

*

* *

G. Țițeica este primul matematician român, care a continuat în țară, după ce s-a întors din străinătate, activitatea științifică începută acolo.

În teza sa, din 1899, de la Paris, despre congruențele ciclice și sistemele triplu conjugate, precum și în numeroasele lucrări cu teme similare, din anii 1898—1900, *Țițeica* a stabilit mai multe proprietăți ale congruențelor speciale, ale ecuației *Laplace*, ale sistemelor triplu conjugate.

¹ Poggendorff, *Coculescu* [3], *Ionescu* [73].

² *Jahrbuch*, vol. 25, 1897, p. 1872; vol. 26, 1898 p. 1094—95. R. Marcolongo: Il problema dei tre corpi. Milano, 1919, p. 131.

El a dat pentru congruențele ciclice unele proprietăți caracteristice, care generalizează rezultatele lui *Ribaucour* și *Cosserat*. *Țițeica* a arătat că suprafața medie a unei congruențe *Guichard* este și ciclică și *Ribaucour* și corespunde cu ortogonalitatea elementelor, unei suprafețe de curbură totală constantă. Tangentele la curbele u , v ale suprafeței medii formează o congruență ciclică.

Fie punctul M al unui sistem triplu conjugat, deci coordonatele sale x , y , z satisfac sistemului

$$\theta_{uv} = a\theta_u + b\theta_v, \quad \theta_{uw} = a'\theta_u + b'\theta_w, \quad \theta_{vw} = a''\theta_v + b''\theta_w$$

Dacă și

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

este o soluție a acestui sistem atunci înfășurătoarea sferelor de centru M și rază R când u (respectiv v sau w) rămîne constant determină pentru fiecare punct M trei coarde de contact care se taie într-un punct M' , care descrie de asemenea un sistem triplu conjugat, numit suplimentar sistemului dat.

Fie planul

$$ux + vy + wz + p = 0$$

ai cărui coeficienți u , v , w , p satisfac sistemului *Laplace*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_i \partial u_j} = a_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial u_i} + a_{ji} \frac{\partial \theta}{\partial u_j} + b_{ij} \theta \quad (i \neq j = 1, 2, 3)$$

Pentru $u_1 = \text{const}$ (respectiv u_2, u_3) planul își atinge înfășurătoarea în M_1 (respectiv M_2, M_3). $M_1 M_2 M_3$ este triunghiul dual al triedului format de tangentele unui sistem triplu conjugat, în punctul comun. Pentru $u_1 = \text{const.}$, dreapta $M_2 M_3$ descrie o congruență ale cărei focare sînt M_2, M_3 .

Mai departe *Țițeica* consideră sisteme triplu conjugate generalizate.

O altă direcție de lucrări ale lui *Țițeica* se referă la deformarea suprafețelor, generalizînd unele rezultate ale lui *Guichard*.

Plecînd de la o proprietate a lui *Ribaucour*, *Țițeica* a arătat că congruența generată de dualele normalelor unei cuadrice este în același timp și ciclică și *Ribaucour*.

G. Țițeica a continuat să producă după 1900, multe lucrări de o deosebită valoare științifică. El este primul dintre matematicienii noștri cei mai de seamă¹.

*

* *

A. Davidoglu (1876—1958) a susținut în 1900 doctoratul la Paris cu o teză despre soluțiile unui tip de ecuații diferențiale de ordinul al patrulea, în legătură cu mișcarea vergelei elastice, de forma

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k\varphi(x)y$$

¹ Vranceanu [2].

unde $\varphi(x)$ este o funcție pozitivă și k pătratul frecvenței oscilației. *Davidoglu* a utilizat metoda aproximațiilor succesive a lui *E. Picard* și a determinat valorile lui k , pentru care seriile sînt convergente.

În același an, *Davidoglu* a publicat două note în C. R. Paris; el a determinat un șir infinit de valori pozitive $k_1, k_2, \dots, k_n$ astfel ca ecuația vergelei, pentru $a \leq x \leq b$ să posedă o integrală care atinge axa Ox în a și b și se anulează de $n-1$ ori între a și b ; în a doua notă a aplicat metoda aproximațiilor succesive la determinarea marginii superioare a distanței dintre două zeruri consecutive ale integralelor ecuațiilor lineare de ordinul al treilea¹.

George Iuga (1871—1958) și-a susținut doctoratul la Strassbourg cu o teză despre suprafețele ciclice minimale. În dizertația sa, reproducă în *Mathematische Annalen*, vol 52 a considerat suprafețele de ecuație

$$x = a(r) + r \cos u, \quad y = b(r) + r \sin u, \quad z = z(r)$$

a, b, z fiind coordonatele liniei centrale a suprafeței, iar r, u parametri. *Iuga* a studiat proprietățile acestor suprafețe, exprimînd pe a, b, r cu ajutorul funcțiilor eliptice.²

St. N. Burileanu a publicat în *Bul. Soc. Șt. București*, din 1900, o notă despre mișcarea proiectilelor sferice, în care a studiat rezistența aerului în mișcarea acestor proiectile. Alte lucrări ale autorului au apărut după 1900; teza și-a susținut-o în 1901, la Paris.

Lucrări de matematici superioare au fost publicate și de alți autori³ romîni, pînă la 1900, în diferite publicații.

*

* *

Prima încercare de a înființa o societate, care să cuprindă pe matematicieni este datorită lui *E. Bacaloglu*, din 1862.

În 1866 s-a format Societatea literară romînă, transformată peste un an în Societate academică, cu trei secții. Treptat au fost admiși și matematicieni ca membri ai Academiei: *P. Poienaru* (1870), *E. Bacaloglu* (1879), *Sp. Haret* (1879) etc. În ședințele Academiei erau expuse uneori și comunicări de matematici; diverse lucrări de matematici primite erau analizate de membrii delegați și referatele lor, discutate în ședință. Arbitru în problemele de matematici a fost multă vreme *Șt. Fălcoianu*.

Din 1869 apare publicația *Analele Societății Academice Romîne*, transformată în 1882 în *Analele Academiei Romîne*. În acest an *Sp. Haret* a publicat o notă de hidrodinamică experimentală. Din 1886 secțiile Academiei au scos părți separate din *Anale*; dar *Memoriile secțiunii științifice* nu apăreau cu regularitate. Prima notă originală de matematici a fost publicată acolo de *C. Gogu*, în 1892. Alte cîteva lucrări se referau mai mult la cosmografie⁴.

¹ Jahrbuch, 31, 1902, p. 353, 769. Vălcovici [2].

² Jahrbuch, 30, 1901, p. 576, Andonie [1].

³ Jahrbuch 31, 1902.

⁴ Analile Societății Academice Romîne. 1—22 București 1869—1900.

Prima revistă în care matematicilor li se acordă o atenție permanentă este intitulată *Recreații Științifice*; ea a apărut la Iași între 1883—89. În această revistă, matematicile ocupau cea mai mare parte. Revista publica note, probleme rezolvate și probleme propuse mai ales de nivelul școlii medii. Notele erau mai mult traduceri și nici problemele propuse nu erau în general, originale. O atenție deosebită era dată problemelor rezolvate.

Redactorii revistei erau *C. Climescu, I. Ralet, I. Praja, G. Lucescu, G. Roșu, M. Ţoni, I. Melic*.

Dintre corespondenții foarte numeroși ai revistei, elevi de liceu și studenți, unii au depus o activitate remarcabilă, de exemplu: *E. Pangrati, Gr. Stratilescu, D. Ghibănescu* etc. în anul întâi; *Gr. Stratilescu, E. Pangrati, D. Bungețeanu* etc. în anul al doilea; *M. Georgian, Gr. Stratilescu, P. Panaitescu* etc. în anul al treilea; *V. Cristescu, P. Panaitescu, Gr. Peretz* etc. în anul al patrulea; *V. Cristescu, C. Brinză, Gr. Peretz* etc. în anul al cincilea; *V. Cristescu, C. Brinză, D. Pompei* etc. în anul al șaselea.

Recreațiile Științifice au reușit să trezească un viu interes pentru matematici în rândul elevilor și studenților¹.

O altă revistă cu o rubrică permanentă de matematici este *Revista Școalei*, din Craiova, în cursul anului 1891—92. Animatorul ei era *G. Țițeica*, elev al liceului, secundat de *Em. Samitca* și alții².

În lipsa unei publicații indigene, elevii de liceu, studenții și chiar profesorii și inginerii încep să activeze la revistele din străinătate.

La *Mathesis*, care apare în Belgia, au activat din 1889, mai ales *V. Cristescu, I. Ionescu, Bogdan Ionescu, A. Ioachimescu, T. Vladimirescu, C. Brinză, A. Davidoglu, G. Țițeica, Constanța Pompilian, D. Petrescu* etc.

La *Nouvelles Annales de Mathématiques*, din 1895 activează *G. Țițeica*.

La *Journal de math. élémentaires et spéciales*, din 1895 activează *G. Țițeica* și apoi *T. Vladimirescu*.

O activitate deosebit de bogată a fost depusă de români, elevi de liceu, la *Journal de math. élémentaires*. Prima colaborare românească, de calitate deosebită este a lui *Al. Juvara*, din primul an de apariție al revistei, în 1877. Între 1890—96 au desfășurat o activitate remarcabilă: *I. Negrețu, A. Davidoglu, A. Georgescu, D. Germani, G. Țițeica, I. Tutuc, M. Constandachi*.

*
* *
*

Din sept. 1895 apare prima revistă de matematici la noi, *Gazeta Matematică*. Ea a durat fără întrerupere 54 de ani. Inițiatorii *Gazetei Matematice* sînt cîțiva ingineri. Revista cuprindea de la început, rubricile: note matematice, chestiuni de examen, probleme rezolvate, probleme propuse.

Gazeta Matematică a pus accentul pe cercetarea originală și aceasta a ridicat simțitor nivelul învățămîntului matematicilor elementare, la noi. *Gazeta Matematică* se adresa celor mai buni elevi de liceu, care cîștigînd

¹ *Recreații Științifice*. Iași, vol. 1—6, 1883—1888; Popa [9], [1].

² *Revista Școalei*. 1 Craiova 1891—92; Sergescu [7].

din școală, prin emulare reciprocă, o dexteritate în rezolvarea problemelor de matematici elementare puteau să concureze în condiții bune la examenele de admitere în învățământul tehnic.

Succesul Gazetei Matematice a fost de la început, imens. Deși revista nu era popularizată, din primele ei numere au apărut numeroși rezolvitori. Din anul al doilea, activitatea corespondenților este de-a dreptul impresionantă.

Redactorii cei mai devotați gazetei, în primii cinci ani, au fost inginerii *Ion Ionescu*, *A. Ioachimescu*, *V. Cristescu*.

În *Gazeta Matematică*, în chiar perioada analizată s-au publicat multe note științifice interesante. Unele sînt de matematici superioare, datorite *Constanței Pompilian*, lui *A. Ioachimescu*, *Ion Ghibaldan*, *Bogdan Ionescu* etc. În primii ani, matematicile de nivel universitar erau bine cultivate la *Gazeta Matematică*. Precumpăneau însă notele cu caracter mediu, generalizări sau observații pe marginea materialelor publicate. Tonul acestor cercetări l-au dat *G. Țițeica* și *I. Ionescu*. Important este că acest gen de lucrări a fost continuat cu succes de corespondenți.

Au depus o activitate foarte frumoasă la *Gazeta Matematică*:

A. Iliovici, *B. Ionescu*, *Gr. Macarie*, *N. Negoescu*, *C. Popovici* etc. în primul an;

I. Moscuna, *A. Iliovici*, *B. Ionescu*, *C. Popovici*, *G. Iliovici* în anul al doilea;

A. Iliovici, *C. Dobrovici*, *C. Țițirigă*, *V. Cambureanu*, *G. Urechidă* în anul al treilea;

G. Urechidă, *C. Țițirigă*, *N. Alexandrescu*, *I. Nicolaescu*, *N. Muzicescu* în anul al patrulea;

Tr. Lalescu, *N. Mirea*, *G. Oprescu*, *G. Panaitopol*, *E. Fischer* în anul al cincilea.

Prin atitudinea binevoitoare dar pretențioasă a redactorilor îndrumători; prin urmărirea riguroasă a sarcinilor asumate benevol de membri și de corespondenți; prin satisfacția morală, a menționării tipărite în paginile Gazetei, cu care erau încurajate obiectiv chiar și micile observații personale, interesante ale începătorilor; dar mai ales prin atmosfera întreagă a acestei activități colective, harnice, ingenioase și armonioase, *Gazeta Matematică* a fost pe toată durata existenței ei, de peste jumătate de secol, o școală de educație matematică, a tineretului¹.

*
* *
*

În 1894, *C. Gogu* a fondat Societatea Amicii Științelor Matematice. Societatea ținea ședințe de comunicări și discuții.

Peste un an, societatea a decis să scoată un Buletin lunar, care a apărut din octombrie 1895, timp de un an, sub grija lui *G. Țițeica*. În Buletin erau publicate dările de seamă ale ședințelor, note matematice, probleme propuse și rezolvate, în general din matematicile elementare. Note mai interesante au publicat *G. Țițeica*, *A. Ioachimescu*, *D. Emanuel*. Foarte activ ca rezolvitor era *C. Miculescu* și *P. Petrescu*².

¹ Ionescu [74], [75], Țițeica [4], [5], [6] Ionescu-Bujor [1], [2], [3], Țino [1], Stan [1].

² Buletinul Societății Amicii Științelor matematice. 1. București 1895–96.

În 1890, *C. Istrati* a fondat Societatea de Științe Fizico-chimice. În 1897, prin contopirea Societăților precedente, s-a format Societatea de Științe din București, cu o secție de matematici. Din 1903 ea a devenit Societatea Română de Științe¹.

Din 1897, revista în care puteau să fie publicate în țară lucrările de matematici de cel mai înalt nivel era Buletinul Societății de Științe. Din primele volume, până în 1900, în acest Buletin au apărut numeroase note matematice remarcabile.

În 1897, *G. Țițeica* publică două note despre curbele de curbură constantă și despre liniile ombilicate; *D. Emanuel*, despre înjumătățirea argumentului funcțiilor eliptice; *P. Suchar* despre mișcarea unui corp greu; *Bogdan Ionescu* despre liniile focale ale cuadrivelor; *A. Ioachimescu*, despre generarea cubicelor și despre interpolarea funcțiilor algebrice; *I. Ghibaldan* despre calculul probabilităților etc.

În volumele următoare continuă să publice note de matematici superioare *G. Țițeica*, *D. Emanuel*, *P. Suchar*, *I. Ghibaldan*, *Șt. Burileanu*².

Din 1885, Societatea Politehnică editează un Buletin. Printre membrii Societății sînt și licențiați în matematici. Multe studii tehnice publicate în Buletinul Societății fac uz de un aparat matematic superior, de exemplu notele inginerilor *Fl. Pomponiu*, *Tancred Constantinescu*, *Iacob Solomon*, *Al. Zahariade*, *P. Demetriade*, *G. Vartanovici*, *I. Cornea* în care intervin frecvent noțiuni de analiză matematică și de geometrie diferențială.

Aceste note dovedesc înalta pregătire teoretică a inginerilor noștri, încă înainte de 1900³.

*
* *
*

Prima bibliotecă publică în țara noastră s-a format în epoca Regulamentului Organic. În Țara Românească, biblioteca de la colegiul Sf. Sava a devenit biblioteca națională, beneficiind de dreptul depozitului legal. Ea s-a dezvoltat repede. În 1838 s-a deschis sala de lectură pentru public. În 1846, *I. Genilie* a publicat un catalog în două volume, pe specialități. În 1864, biblioteca de la Sf. Sava, cu 27 mii de volume s-a mutat în noul local al Universității și a devenit Biblioteca centrală a statului și ulterior, Biblioteca Academiei.

În 1835, odată cu Academia din Iași s-a inaugurat și biblioteca; în 1841 ea și-a deschis sala de lectură. În acest an, *D. Gusti* a publicat un catalog. În 1860, a devenit bibliotecă universitară, iar în 1884, Bibliotecă centrală.

Biblioteci publice pentru cărți numai sau predominante de matematici nu avem încă, în secolul al XIX-lea⁴.

N-au existat nici laboratoare și nici observatoare.

O apariție singulară este observatorul astronomic *Bathyani* din Alba Iulia. Creat din ambiția unui episcop colecționar, el a încremenit pe poziția

¹ Istrati [3], [4], [5].

² Buletinul Societății de Științe din București, vol. 6—9. București 1897—1900.

³ Buletinul Societății Politehnice din România, 1—16. București. 1885—1900.

⁴ P. Oprescu: Inițierea și dezvoltarea bibliotecilor publice românești. Studii și Cerc. bibliologie. vol. 1, 1955, p. 43.

lui intactă de la sfârșitul secolului al XVIII-lea, cu instrumentele sale de-
suețe și cu biblioteca sa de incunabule și alte cărți de valoare universală¹.

Tipografiile cele mai bine utilitate pentru cărți de matematici au fost
de timpuriu, tipografia lui *Eliade* și tipografia lui *Asachi*. Cărțile tipărite
acolo, cu litere cirilice au un aspect estetic și puține greșeli de tipar. Tipog-
rafia lui *Eliade* a trecut apoi în posesia Colegiului Sf. Sava și ulterior a
devenit Imprimeria Națională.

*
* *

Din cercetarea acestui material avem de făcut următoarele observații :

a) Trecînd peste unele forme sporadice, activitatea matematică în
țara noastră s-a manifestat tîrziu, din cauza unor condiții obiective. De-abia
în a doua jumătate a secolului al XIX-lea avem în Principatele Romîne
cîteva școli medii, din al șaselea deceniu avem primele universități și
în ultimii ani, o societate și un periodic de specialitate.

b) Deși a plecat de la un nivel atît de scăzut, activitatea matematică
de la noi s-a dezvoltat de la început, considerabil. În două decenii de la
crearea primei universități, matematicienii noștri produc lucrări de doctorat,
în atenția întregii lumi matematice, aducînd o contribuție personală,
romînească, la înaintarea științei.

c) Cu tot progresul realizat, activitatea matematică la noi prezenta
încă unele dificultăți la sfârșitul secolului al XIX-lea.

În concluzie, activitatea matematică înfloritoare de la noi, din secolul
actual nu era posibilă fără munca devotată a predecesorilor noștri, care
merită să fie cunoscută.

BIBLIOGRAFIE*

- G. h. Adamescu: *Prezentare la Operele lui Spiru C. Haret*. I. B. probabil 1934.
D. Almaș, G. Georgescu Buzău, A. Petric: *Istoria Romînilor*. B. 1960.
G. Andonie: *George Iuga*. Gaz. Mat. Fiz. A. 13, 1961, p. 215.
Barbu N. Angelescu: *Societatea Romînă de Științe*. 50 de ani. B. 1942.
Appeltauer: *Elemente de Algebră*. B. 1842. Trad. P. Poienaru.
D. Asaky: *Über die Umkehrung der Reihen*. München. 1841.
Gheorghe Asachi: **1.** *Elemente de matematică. Aritmetică*. Iași 1836. **2.** *Elemente de
matematică. Algebră*. Iași 1837. **3.** *Elemente de matematică. Geometrie elementară*.
Iași 1838. **4.** *Despre școalele din Moldova*, la 1845. Rev. Inv. 6, 1910, p. 51. **5.** *Question
de l'instruction publique en Moldavie* Iași, 1858.
Emanoil Bacaloglo: *Elemente de algebră*. B. 1870.
G. Baiculescu: *Prefață la vol. I. Eliade Rădulescu*, Craiova. 1939.

¹ Ionescu [6], Schileru [1].

* În această listă sînt trecute lucrările consultate, care se referă, uneori parțial, la diferite
forme de activitate matematică, în țara noastră, pînă la 1900.

Prescurtări: A. R. (Academia Romînă), An. (anale), Bibl. (bibliotecă), B. (București), Bul. (bule-
tin), Cerc. (cercetări), Fac. (facultate), Fasc. (fascicolă), Fiz. (fizică), Gaz. (gazetă), Inst. (institut),
Lucr. (lucrări), Mat. (matematici), Mem. (memorii), nr. (număr), p. (pagină), Pol. (politehnică), Repr.
(reprodus), Rev. Ad. (Revista Științifică V. Adamachi), Soc. (societate), Șt. (științe), Stud. (studii),
Trad. (tradus), Univ. (universitate), Vol. (volum).

- N. Bănescu: 1. Academia grecească din București și școala lui Gh. Lazăr. An. Univ. Cluj. 1925. 2. Cei dintii bursieri români în străinătate. Rev. Inv. 6, 1910, p. 216. 3. Învățământul public din Valahia, la 1832. Rev. Inv. 5, 1909, p. 592.
- Dan Barbilian: Cea dintii colaborare străină la Gazeta Matematică. Gaz. Mat. 51 1945, p. 148.
- C. Bărbulescu: Prefață la vol. N. Milescu, B. 1956.
- G. Baricz: Kuvintare șkolasticească la eksamenul de vară în școala românească din Brașov Incetate. Brașov 1837.
- C. Bedreag: 1. Bibliografia fizicii românești. B. 1957. 2. Începuturile învățămîntului fizicii în țara noastră. Gaz. Mat. Fiz. B. 10, 1955, p. 385. 3. Em. Bacaloglu, Gaz. Mat. Fiz. A. 5, 1953, p. 303. 4. Em. Bacaloglu și difracția. Gaz. Mat. Fiz. A. 12, 1960, p. 339.
- I. Beleş: Un inventar al cărților de matematici tipărite în românește. Gaz. Mat. 22, 1917, p. 203, 249.
- D. Berlescu: Universitatea din Iași de la 1860 pînă la 1918. Univ. Al. I. Cuza. Iași I. B. 1960 p. 82.
- I. Bianu: Vieția și activitatea lui Maniu Samuil Miculu alias Clain de Sadu. B. 1876.
- V. P. Bicikov: Iz istorii matematiki v Rumîni. Matematika v Iasskom universitete. Istoriia fizico-mat. nauk. 43. Moscova, 1961, p. 290.
- Șt. Bîrsănescu: 1. Schola latina de la Cotnari. B. 1957. 2. Academia domnească din Iași. B. 1962.
- P. Bogdan: Școala Normală Superioară din Iași. Rev. Ad. 25, 1939, p. 53.
- Wolfgangi Bolyai de Bolya: Tentamen. Budapesta. I. 1897, II. 1904.
- Ianoș Bolyai: Appendix. B. 1954.
- Mihail Botez: Studiul geometriei descriptive acum o sută de ani în România. Rev. Ad. 33, 1947, p. 83.
- Teodor Botiș: Istoria școalei normale și a Institutului teologic ortodox din Arad. Arad 1922.
- Filofteia Brătilă: Desvoltarea matematicii la romîni. Știință și Progres. 10, 1945, p. 16.
- G. Buicliu: 1. Frații sau frîngerii. Gaz. Mat. 28, 1923, p. 329. 2. Frații sau frîngerii. Gaz. Mat. 29, 1924, p. 413. 3. Aritmetica și Algebra lui G. Manu. Gaz. Mat. 31, 1925, p. 121. 4. Activitatea lui Ion Ionescu la Gazeta Matematică. Gaz. Mat. 53, 1947, p. 63.
- D. Bungețeanu: Memoriu de titluri și activitate didactică și științifică. B. 1910.
- George Călinescu: Istoria literaturii romîne B. 1941.
- G. Călinescu, I. Vitner, O. Crohmălniceanu: Istoria literaturii romîne. I. B. 1954.
- N. Cartoian: 1—3. Istoria literaturii romîne vechi. B. 1940—45.
- Petre Cazanaci: 1. Un vechi manuscris de matematici. Gaz. Mat. 38, 1933, p. 283. 2. Aritmetica lui Gh. Asachi. Gaz. Mat. 43, 1937, p. 64, 120, 235, 344, 398, 453, 510, 564, 618. 3. I. Pop. Rev. Ad. 16, 1930, p. 127.
- C. Cihodaru: Învățămîntul în Moldova, în sec. XVI—XVIII. Univ. Al. I. Cuza, Iași. I. B. 1960, p. 9.
- Florica Cîmpian: 1. Un manuscris românesc cu probleme de algebră și trigonometrie din primii ani ai secolului al XIX-lea. An. Univ. Iași, 5, 1959, p. 213. 2. Un manuscris moldovenesc cuprinzînd o traducere a geometriei și trigonometriei lui Wolff, anterioară aceleia făcute de Gh. Lazăr. An. Univ. Iași 6, 1960, p. 783. 3. Despre algebra tipărită și cea în manuscris a lui G. Asachi. Rev. Univ. și Inst. Pol. Iași, 2, 1955, p. 317. 4. Geometria și trigonometria lui G. Asachi. An. Univ. Iași, 2, 1956, p. 333. 5. Manuscrisul de Geometrie al lui Gheorghe Lazăr. An. Univ. Iași, 4, 1958, p. 213. 6. Cursuri de matematici ținute la Academia Mihăileană. An. Univ. Iași, 2, 1956, p. 325. 7. Em. Bacaloglu. B. 1956. 8. Note biografice în legătură cu activitatea matematică a lui Em. Bacaloglu. Mem. A. R. 16, mem. 4. 9. Aplicații ale curbării lui Bacaloglu în fizică. Bul. Fac. Cernăuți, 11, 1937, p. 184. 10. Contribuția lui Bacaloglu la studiul podarelor curbilor plane. Bul. Fac. Cernăuți, 12, 1938, p. 107. 11. Despre curbele sincrone în legătură cu o lucrare a lui E. Bacaloglu. Gaz. Mat. 46, 1940, p. 68. 12. Algebra lui E. Bacaloglu. Gaz. Mat. 44, 1939, p. 393, 462. 13. I. Ionescu și cercetările de istorie a matematicilor romînești. Mem. A. R. mem. 50, 1950.
- C. Climescu: Curs de geometrie analitică. Secțiuni conice. Iași. 1898.

- C. Climescu: 1. Cotitul vaselor de la finele secolului al XVIII-lea. *Gaz. Mat.* 26, 1921, p. 281. 2. Curs întreg de matematică curată. *Gaz. Mat.* 22, 1917, p. 193, 262; vol. 23, 1918, p. 193. 3. Un vechi manuscris de aritmetică. *Gaz. Mat.* 27, 1921, p. 12, 41, 74.
- N. Coculescu: 1. Refracția astronomică. B. 2. Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice. Paris. 1895. 3. Dare de seamă asupra lucrărilor de matematici ale lui C. Gogu. *Bul. Soc. Șt.* 6, 1897, p. 109. 4. Invariabilitatea axelor mari ale orbitelor planetelor. *Natura.* 2, 1907, p. 230.
- Al. Costinescu: Memoriu cu privire la pricinile ce au împiedicat propășirea învățaturii publice în Moldova, în 1845. *Rev. Inv.* 5, 1910, p. 758.
- Axente Creangă: 1. Din trecutul matematicii. Sibiu, 1937, p. 40. 2. Activitatea științifică a lui Sp. Haret. *Rev. Inv.* 12, 1924, p. 655.
- Ascaniu Crișan: O carte de aritmetică din anul 1822. *Natura*, 22, 1933, nr. 2.
- Const. Cristea: Gh. Lazăr. *Gaz. Mat. Fiz. B.* 5, 1954, p. 174.
- Vasile Cristescu: 1. Aritmetica lui Niculae Milescu Spătarul. *Gaz. Mat.* 35, 1929, p. 16. 2. Cuvintul pătrat. *Gaz. Mat.* 35, 1929, p. 22.
- N. Culianu: 1. Lecțiuni de Calculu Diferențial și Integralu I. fasc. 1. Iași, 1870. 2. Idem, Iași, 1874.
- Anton Davidoglu: Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques. Paris 1900.
- R. Dejeu: Din istoricul liceului român Samuil Vulcan din Beiuș. *Rev. Inv.* 16, 1928, p. 547.
- Paul Drăghicescu: Un filosof român din sec. XVII: G. Ivul. *Gaz. Mat.* 50, 1945, p. 383.
- Marin Dumitrescu: Geometria neeuclidiană. *Gaz. Mat.* 42, 1936, p. 64–70.
- Marcelle Ehrhard: Le prince Cantemir à Paris. Paris 1938.
- Ion Eliade Rădulescu: George Lazăr. În vol. Scrieri literare. Craiova, 1939, p. 250, 412.
- Pompiliu Eliade: 1. Histoire de l'esprit public en Roumanie. I. B. 1905. 2. Din arhivele Sorbonei științifice. *Rev. Inv.* 1, 1905, p. 451.
- David Emanuel: Étude des intégrales abéliennes de troisième espèce. Paris, 1879.
- Ștefan Emilian: Cursu practic de perspectivă liniară. Iași, 1886.
- C. Erbiceanu: 1. Discurs asupra școalei lui Vasile Lupu și Matei Basarab. Iași 1885. 2. Bărbații culti greci și români și profesorii de la Academii din Iași și București în epoca zisă fanariotă. B. 1905.
- L. Francoeur: Aritmetica. B. 1832. Trad. I. Eliade Rădulescu.
- I. Genilie: Geografie istorică, astronomică, naturală și civilă. B. 1835.
- Ioan Georgescu: Școlile din Blaj. Boabe de Grâu. 1933, p. 334.
- Gh. Th. Gheorghiu: George Țițeica. *Gaz. Mat.* 45, 1940, p. 281.
- Gh. Ghibănescu: Centenarul Socolei. Iași, 1903.
- Onisifor Ghibu: 1. O școală din Transilvania, acum 88 de ani. *Rev. Inv.* 12, 1924, p. 569. 2. Universitatea Daciei Superioare. B. 1929.
- Const. Giurescu: Istoria Românilor, III₂, B. 1946, p. 915–958.
- Const. Gogu: Sur une inégalité lunaire à longue période, due à l'action perturbatrice de Mars. Paris. 1882.
- Spiru Haret: 1. Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires. Paris. 1878. 2. Curs de trigonometrie. B. 1873. 3. Lecții de statică. Lecții de dinamică. Notițe de curs. *Bibl. Fac. Mat. B.* 1900. 4. Raport de premiere al cursului lui C. Climescu An. A. R. 22, 1900.
- Eugen Iacob: Primii studenți la matematici și filosofie în limba română. *Gaz. Mat.* 53, 1948, p. 332.
- D. Iarcu: Bibliografie cronologică română. B. 1873.
- Andrei Ioachimescu: 1. profesorul Gheorghe Kirilov, *Gaz. Mat.* 14, 1908, p. 97. 2. Spiru C. Haret, *Gaz. Mat.* 18, 1913, p. 161. 3. Spiru C. Haret, *Gaz. Mat.* 40, 1935, p. 481.
- Ion Ionescu: 1. Istoricul Societății Politehnice. B. 1927. 2. Istoricul învățămîntului ingineriei în România B. 1932. 3. Povestiri științifice I. B. 1941. 4. Povestiri științifice II. B. 1942. 5. Cel mai vechi matematician al nostru. *Gaz. Mat.* 27, 1921, p. 87. 6. Observatorul astronomic Bathyani din Alba Iulia. *Gaz. Mat.* 45, 1940, p. 617. 7. Aritmetica

spătarului Nicolae Milescu Cîrnu. *Gaz. Mat.* 46, 1941, p. 249. **8.** Antioh Cantemir. *Gaz. Mat.* 45, 1939, p. 337, 393. **9.** Călătoria unui matematician prin Moldova, în sec. XVIII. *Natura.* 14, 1925, 7. Repr. [3], p. 177. **10.** Cîteva date despre viața și operele matematicianului Vito Caravelli. *Gaz. Mat.* 7, 1901, p. 29. **11.** Introducerea geometriei aplicate în școlile grecești din Iași. *Gaz. Mat.* 26, 1921, p. 257. **12.** Primul profesor de matematici în limba romînă. *Gaz. Mat.* 21, 1916, p. 410. **13.** Asupra studiilor lui Asachii. *Gaz. Mat.* 42, 1937, p. 526. **14.** Primii elevi ingineri romîni. *Gaz. Mat.* 41, 1935, p. 183. **15.** Matematica în Regulamentul Organic. *Gaz. Mat.* 21, 1916, p. 171, 208, Repr. [4] p. 132. **16.** Un contract de profesorat. *Gaz. Mat.* 34, 1929, p. 421. **17.** Al. Gavra, profesor ardelean de matematici. *Gaz. Mat.* 35, 1929, p. 54. **18.** Primul profesor romîn de geometrie analitică. *Gaz. Mat.* 36, 1931, p. 289. **19.** Primii licențiați în matematici de la facultățile de științe din România. *Gaz. Mat.* 39, 1933, p. 130. **20.** Școala națională de Poduri și Șosele. *Gaz. Mat.* 26, 1920, p. 41. **21.** Gheorghe Kirilov. *Gaz. Mat.* 44, 1939, p. 225. **22.** *Cahier d'arithmétique.* *Gaz. Mat.* 23, 1918, p. 121. **23.** *Algèbre.* *Gaz. Mat.* 23, 1918, p. 145. **24.** Remarques sur la géométrie. *Gaz. Mat.* 23, 1918, p. 169. **25.** Curs întreg de matematică curată. *Gaz. Mat.* 23, 1918, p. 249. **26.** Prima aritmetică tipărită în limba romînă. *Gaz. Mat.* 41, 1936, p. 20. Repr. [4] p. 98. **27.** Vechile geometrii romînești. *Gaz. Mat.* 40, 1935, p. 486, 531, Repr. [4], p. 108. **28.** Aritmetica lui Gheorghe Lazăr. *Natura.* 20, 1931, nr. 10. Repr. [3], p. 68. **29.** Geometria lui Gheorghe Lazăr. *Natura.* 23, 1934, nr. 5. Repr. [3] p. 244. **30.** Aritmetica lui Eliade. *Gaz. Mat.* 24, 1918, p. 33, 129. **31.** Centenarul primei cărți romine de matematici, tipărite la București. *Natura.* 21, 1932, nr. 10. Repr. [3], p. 119. **32.** Nomenclatura geometrică romînă. *Gaz. Mat.* 41, 1935 p. 169. **33.** Recenzia fasciculei *Pravila comerțială de la 1838*, de V. Marian. *Gaz. Mat.* 42, 1937, p. 419. **34.** Centenarul unei mici astronomii romîne. *Gaz. Mat.* 48, 1942, p. 26. **35.** Algebra lui Petrache Poienaru. *Natura.* 18, 1929, nr. 3, Repr. [3], p. 141. **36.** Prima trigonometrie romînă. *Gaz. Mat.* 21, 1916, p. 372. **37.** Aritmeticele lui Lazarini. *Natura.* 17, 1928, nr. 4, Repr. [3], p. 131. **38.** Algebra lui Constantin Șerbescu-lu. *Gaz. Mat.* 45, 1940, p. 225. **39.** Recenzia cursului de Geometrie Analitică de C. Climescu. *Gaz. Mat.* 4, 1898, p. 41. **40.** Anunțuri de cărți matematice în Monitorul Oficial. *Gaz. Mat.* 38, 1933, p. 454. **41.** Léon Lalanne și introducerea sistemului metric în România. [4] p. 44. **42.** Planimetrie fără geometrie și fără aritmetică în sec. XX. *Gaz. Mat.* 22, 1917, p. 83. **43.** Un etalon moldovenesc în sec. XVIII. *Gaz. Mat.* 23, 1918, p. 134. **44.** Dobîndă anticipativă. *Gaz. Mat.* 32, 1927, p. 241. **45.** Dobînda în vechile așezăminte romînești. *Natura.* 16, 1927, Nr. 5, 6, 7. Repr. [3] p. 84. **46.** Unități vii de măsură. *Gaz. Mat.* 32, 1927, p. 166. **47.** Despre palme. *Gaz. Mat.* 32, 1927, p. 209. **48.** Scrierea numerelor mari. *Gaz. Mat.* 34, 1929, p. 377. **49.** Intunearec. *Gaz. Mat.* 34, 1929, p. 377. **50.** Perechea. *Gaz. Mat.* 34, 1929, p. 460. **51.** Pătrați de plumb. *Gaz. Mat.* 35, 1929, p. 90. **52.** Stînjei masă. *Gaz. Mat.* 35, 1930, p. 417. **53.** Numitori subînțeleși. *Gaz. Mat.* 37, 1931, p. 91. **54.** Timpul ca măsură a suprafețelor. *Gaz. Mat.* 38, 1932, p. 21. **55.** Măsurarea suprafețelor la noi, acum 110 ani. *Gaz. Mat.* 45, 1940, p. 574. **56.** Probe matematice. *Gaz. Mat.* 45, 1940, p. 410. **57.** De cînd moșiile au și lungime. *Gaz. Mat.* 45, 1940 p. 524. **58.** Media și extrema rație. *Gaz. Mat.* 46, 1941, 529. **59.** Variația suprafețelor „perimetrelor”. *Gaz. Mat.* 50, 1945, p. 219. **60.** Matematica administrativă sub fanarioți. *Gaz. Mat.* 25, 1920, p. 175. **61.** Programul matematicilor în colegiul Sf. Sava din București pe anul școlar 1835—36. *Gaz. Mat.* 36, 1930, p. 20. **62.** Cursuri vechi de matematici la Iași. *Gaz. Mat.* 35, 1929, p. 21. **63.** Matematica la Iași în anul școlar 1837—38. *Gaz. Mat.* 35, 1930, p. 210. **64.** Programele matematice în școlile din Iași pe anul 1844—45. *Gaz. Mat.* 34, 1929, p. 460. **65.** Primul curs de geometrie analitică și geometrie descriptivă pentru ingineri, la Iași. *Gaz. Mat.* 23, 1917, p. 39. **66.** Proiect de institut de educație clasică la Iași în 1864. *Gaz. Mat.* 35, 1930, p. 178. **67.** Geometrie descriptivă aplicată. *Gaz. Mat.* 39, 1934, p. 403. **68.** Un curs forestier de matematici. *Gaz. Mat.* 40, 1935, p. 291. **69.** Programul aritmeticii la școala romînă din Brașov, în clasa pregătitoare pentru comerț, în anul 1837. *Gaz. Mat.* 41, 1936, p. 88. **70.** Raporturile trigonometrice. *Gaz. Mat.* 45, 1940, p. 243. **71.** Cunoștințe matematice pentru ofițerii de Geniu. *Gaz. Mat.* 47, 1942, p. 507. **72.** Raportul dintre matematici și inginerie. *Natura* 6, 1911, p. 193, 225. **73.** Istoricul înființării secțiunii de matematici a Societății Romîne de Științe. *Gaz. Mat.* 27, 1922, p. 225. **74.** Vasile Cristescu. *Gaz. Mat.* 35, 1930, p. 164; vol. 39, 1934, p. 241. **75.** Constituirea, administrarea și redactarea *Gazetei Matematice*. *Gaz. Mat.* vol. jubiliar. B. 1935, p. 9. **76.** În amintirea celor dispăruți. *Gaz. Mat.* 26, 1920, p. 14. **77.** Cei care nu mai sînt. *Gaz. Mat.* vol. jubiliar. B. 1945, p. 20.

- Const. Ionescu Bujor: 1. La aniversarea a 60 de ani de la înființarea Gazetei Matematice. Gaz. Mat. Fiz. A. 7, 1955, p. 485. 2. 60 de ani de la înființarea Gazetei Matematice Gaz. Mat. Fiz. B. 6, 1955, p. 389. 3. Cuprinsul Gazetei Matematice. Gaz. Mat. vol. jubiliar B. 1935, p. 99. 4. Activitatea prof. Gh. Tițeica la Gazeta Matematică, Gaz. Mat. Fiz. B. 10, 1959, p. 323.
- Nicolae Iorga: 1. Introducerea științelor în învățământul românesc. B. 1919. 2. Istoria învățământului românesc. B. 1929. 3—4. Istoria românilor din Ardeal și Ungaria. Vol. 1—2 B. 1915. 5—6. Istoria literaturii române în sec. XVIII. Vol. 1—2. B. 1901.
- C. I. Istrati: 1. Biografia și lucrările lui Emanoil Bacaloglu. B. 1896. 2. Const. Gogu. Bul. Soc. Șt. 6, 1897. 3. Cuvântarea cu ocazia aniversării primului an de la înființarea Societății de Științe fizice. Bul. Soc. Șt. Fiz. 1, 1892, p. 92. 4. Dare de seamă. Bul. Soc. Șt. B. 9, 1900, p. 174. 5. Dare de seamă. Bul. Soc. Șt. B. 19, 1910.
- E. Kreiling; I. Bolyai. Bul. Pol. Timișoara, 4, 1932, p. 295.
- C. Kirițescu: Anuarul Învățământului Secundar din România pe anul 1924—25. B. 1925.
- Traian Lalescu: 1. Viața și activitatea lui Gheorghe Lazăr. În Gaz. Mat. 22, 1917, p. 151, 177, 207, 217. Repr. în Trigonometria de Gh. Lazăr. B. 1919. 2. Unul din primii profesori de matematici munteni, Simeon Marcovici. Gaz. Mat. 29, 1923, p. 41. 3. Cîteva date asupra lui Simion Marcu zis apoi Marcovici, ca profesor de matematici. Gaz. Mat. 29, 1923, p. 121. 4. Niculae Culianu. Gaz. Mat. 21, 1916, p. 161. 5. Cărți și manuscrise grecești de matematici din țările române. Gaz. Mat. 23, 1918, p. 107, 130. 6. Cărți de matematici în Transilvania. Gaz. Mat. 22, 1917, p. 300. 7. Catalogul cărților și manuscriselor românești de matematici, depuse la expoziția serbării de la Iași, în anul 1855. Gaz. Mat. 23, 1918, p. 178. 8. Bibliografie românească matematică. Gaz. Mat. 22, 1917, p. 270.
- Gheorghe Lazăr: Trigonometria. B. 1919.
- Adrian Lazariu: Cîteva date relativ la istoria matematicii în țara noastră.
- Lefebvre de Fourcy: Tratat de Geometrie descriptive. Trad. de Al. Orăscu. I. B. 1851.
- A. M. Legendre: Elemente de Geometrie. Trad. de P. Poienaru B. 1837.
- Const. Lițica: Manuscrise grecești în Biblioteca Academiei Române. An. A. R. 22, 1900, mem. secț. lit. p. 2.
- Jean Livescu: Rolul societăților științifice din Moldova în dezvoltarea științelor din țara noastră. Stud. Cerc. Șt. Iași, 1, 1950, p. 426.
- G. G. Longinescu: 1. Colegiul național Sf. Sava. Natura. 22, 1933, nr. 8. 2. Ermil A. Pangrati. Natura, 22, 1933, nr. 8.
- G. Macovescu: Gheorghe Lazăr. B. 1954.
- Mircea Malița: Manuscrisele tezei de doctorat a lui Spiru Haret. Stud. Cerc. Bibliologie, 1, 1945, p. 278.
- D. Mangeron, C. Calistru, I. Curevici, T. Farcaș: Învățământul tehnic la Universitatea din Iași. Univ. Al. I. Cuza. Iași, 2, B. 1960, p. 356.
- Victor Marin: 1. I. H. Alsted la Alba Iulia. Gaz. Mat. 44, 1939, p. 342, 398. 2. Maximilian Hell și activitatea sa la Cluj. Gaz. Mat. 49, 1943, p. 63. 3. Petru Pipoș, Gaz. Mat. 44, 1938, p. 19, 57. 4. Ioan Bozocanu. Gaz. Mat. 51, 1945, p. 158. 5. Trigonometria lui Gooden. Gaz. Mat. 42, 1937, p. 620. 6. Architecturae militaris tyrocinium a lui E. Vols. Gaz. Mat. 43. 1938, p. 449, 508. 7. Ediția din Cluj a elementelor lui I. G. Pardies. Gaz. Mat. 44, 1939, p. 564, 621. 8. Un extras din aritmetica lui Caspar Scott, tipărită la Cluj. Gaz. Mat. 52, 1946, p. 111. 9. O ediție clujană a Compendiului lui Chr. Wolff. Gaz. Mat. 42, 1936, p. 120, 179. 10. Manuscrise de matematici, fizică și astronomie din biblioteca Academiei R.P.R., filiala Cluj. Stud. Cerc. Bibliologie, 1, 1945, p. 272. 11. Învățământul matematic în școlile superioare din Ardeal, în veacul al XVII-lea, oglindit în manuscrise. Prima sesiune Șt. Bibliologie. B. 1957, p. 300. 12. Dizertația lui Johann Binder. Gaz. Mat. 45, 1940, p. 561. 13. Matematicile la școlile din Blaj. Gaz. Mat. 47, 1942, p. 499. 14. Manuscrisul de aritmetică numerică al lui Iacob Partenie. Stud. Cerc. Mat. Cluj, 8, 1957, p. 291. 15. Două aritmetici vechi anonime. Gaz. Mat. 42, 1937, p. 449, 508. 16. Aritmetica lui G. Obradovici. Gaz. Mat. 42, 1937 p. 337. 17. Aritmetica lui Gheorghe Șincai. Țara Birsei. Brașov, 1937. 18. Tabla tibetului. Gaz. Mat. 41, 1936, p. 516. 19. Scrierile matematice ale lui Gheorghe Lazăr. Gaz. Mat. 41, 1936, p. 414, 460. 20. Primele aritmetici pentru Bucovina. Gaz. Mat. 43, 1938, p. 239.
- Alexe Marin: Geometrie practică. B. 1839.
- I. V. Mătieș: Dr. Paul Tanco. Gaz. Mat. 53, 1948, p. 262.

- I. Maurer: 100 de ani de la moartea lui Farcaș Bolyai. *Gaz. Mat. Fiz. B.* 7, 1956, p. 563.
- I. M. Melic: Elemente de geometrie. Iași. 1869.
- N. Mihăileanu: 1. Opera lui Bolyai Ianos. *Gaz. Mat. Fiz. A.* 12, 1960, p. 286. 2. Primele cursuri de matematici superioare în București. *Stud. Cerc. Mat.* 13, 1962, p. 173. 3. Geometria la Gazeta Matematică. *Gaz. Mat. Fiz. A.* 7, 1955, p. 494.
- Gregoriu Moisil: O pagină din trecutul institutului de învățământ din Năsăud. Școala practică. 3, 1885, p. 355.
- Iuliu Moisil: Pedagogul Vasile Petri. Arhiva Someșană. 5. Bistrița. 1937.
- Al. Myller: 1. Despre începutul Geometriei diferențiale în țara noastră. *Lucr. consfăturii de Geometrie Diferențială. Timișoara.* 1955, p. 17. 2. Curbura lui Bacaloglu. *Gaz. Mat.* 41, 1935, p. 123. 3. La courbure de Bacaloglu. *An. Univ. Iași*, 23, 1937, p. 1. 4. Formule de M. Botesu de Jassy. *Gaz. Mat.* 40, 1935, p. 337. 5. O mențiune a lucrării lui N. Șt. Botez. *Gaz. Mat.* 44, 1939, p. 475. 6. Ioan Rallet. *Rev. Inv.* 9, 1913, p. 145. 7. Schița dezvoltării învățământului matematic la Universitatea din Iași. *Rev. Ad.* 21, 1935, p. 3. 8. Spiru C. Haret. *Rev. Ad.* 4, 1913, p. 1. 9. Despre inversiunea integralelor eliptice. *Gaz. Mat. Fiz. A.* 5, 1953, p. 535.
- Carol Neumann: Material statistic și documentar privind dezvoltarea literaturii tehnice în R.P.R. B. 1957.
- Maria Neumann, Maria Bica, Marta Bocșa, Liubița Stanciu: Despre Appendix. *Lucr. Șt. Inst. Pedagogic Timișoara* 1961, p. 109.
- Gh. Nichifor: E. Bacaloglu ca matematician. *Bul. Șt. Mat.* 29, 1926, B. p. 114.
- Gh. Nicolescu: O geometrie românească de acum 80 de ani, *Gaz. Mat.* 39, 1934, p. 212.
- Afl. Odobescu: Petrache Poienaru. B. 1889.
- Octav Onicescu: 40 de ani de la înființarea Societății române de Științe. *Natura.* 19, 1930.
- C. D. Orășanu: Aritmetica românească de Matei Millo. *Gaz. Mat.* 28, 1922, p. 81.
- Al. Orăscu: Discurs cu ocazia solemnității a 25-a de la înființarea Universității București B. 1889.
- O. Păduraru: Bibliografie. *Bul. Pol. B.* 14, 1943, p. 306.
- Ermil Pangrati: 1—2. Curs de geometrie descriptivă (litografiat) vol. 1, 2. B. 1899—1900. 3. Prof. I. G. Stravolca. *Natura. S.* 1910, p. 161.
- Ilarian Papiu: George Șincai. *An. A. R.* 2, 1869, p. 1.
- D. P.: Elemente de trigonometrie dreptlinială și sferică. B. 1850. Autor D. Pavel.
- Basilin Petri: 1. Instrucțiune pentru învețiatori. . . privitoriu la tractarea cărților scolastice. Sibiu, 1872. 2. Sistemul metricu. Sibiu. 1875.
- Émile Picot: Notice biographique et bibliographique sur Nicolas Spatar Milesco. *Mélanges orientaux.* Paris. 1883, p. 433.
- Petru Pipos: Istoria pedagogiei. Arad. 1892.
- Petrache Poienaru: Georgiu Lazariu și Școala română. *An. A. R.* 4, 1871, p. 111.
- Johann Polek: Die Anfänge des Volksschulwesens in der Bukovina, Cernăuți, 1891.
- Ștefan Pop: Colegiul național Sf. Sava. Boabe de Grâu. 1933 p. 385.
- Ilie Popa: 1. Dezvoltarea matematicii. *Univ. Al. I. Cuza, Iași* 2, B. 1860, p. 7. 2. D. P. Godela, ultimul profesor de matematici al Academiei grecești din Iași. *Stud. Cerc. Mat.* 9, 1958, p. 223. 3. Le modèle italien d'un ancien traité roumain d'arithmétique. *Arheion. Roma.* 19, 1938, p. 69. 4. À la recherche d'un manuscrit perdu. *Bul. A. R.* 22 nr. 3. 5. Gh. Asachi și postulatul lui Euclid. *Gaz. Mat.* 42, 1937, p. 522. 6. Pagini din istoria învățământului nostru superior. *Rev. Inv. superior* 3, 1961, p. 62. 7. Indicatricea lui Bacaloglu. *Gaz. Mat.* 42, 1937, p. 248. 8. Dimitrie Isopescul. *Gaz. Mat.* 45, 1940, p. 457. 9. Recreații științifice, precursora Gazetei Matematice. *Gaz. Mat. Fiz. A.* 7, 1955, p. 492.
- C. Popovici: Spiru Haret și invariabilitatea marilor axe ale planetelor. B. 1913.
- T. Popoviciu: Opera științifică a lui J. Bolyai. *Studia Cluj*, 1960 p. 9.
- V. Popovici: Învățământul în limba națională pînă la 1860. *Univ. Al. I. Cuza. Iași* 1, B. 1960, p. 33.
- G. Popp: Prescurtare de aritmetică spre întrebuițarea școalelor începătoare. B. 1833, *Bibl. Academiei.*
- Gh. Răscanu: Istoricul învățământului particular în România din timpurile cele mai vechi. B. 1906.

- P. Răscanu: Istoricul învățămîntului secundar. Iași. 1906.
- Ioan Rațiu: 1. Dascălii noștri. Blaj. 1908. 2. Vasile Fabian Bob. Blaj. 1907.
- Dionisie Romano: Scurtare de Aritmetică. II. 1838. Buzău. Bibl. Academiei.
- Eugen Schileru: La bibliothèque documentaire Batthyaneum. L'art dans R.P.R. 10, 1955, p. 37.
- Fr. Schmidt: Introducere în vol. Jean Bolyai: La Science absolue de l'espace. Paris. 1912.
- Petre Sergescu: 1. Histoire des sciences mathématiques et physiques en Roumanie. Paris. 1933. Repr. Rev. Mat. Timișoara, 13, 1933, p. 111, 123. 2. Matematica la Romîni, Vălenii de Munte. 1934. 3. Le développement des sciences mathématiques en Roumanie. B. 1937. 4. Note din trecutul matematicii la romîni. Gaz. Mat. 51, 1946, p. 545. 5. Studenții romîni în matematici la Paris între 1870—77. Gaz. Mat. 44, 1939, p. 618. 6. Note despre trecutul matematicii la Craiova. Gaz. Mat. 48, 1943, p. 342. 7. Începuturile publicistice ale lui G. Țițeica. Gaz. Mat. 51, 1945, p. 140. 8. Geometria în învățămîntul tehnic. Bul. Soc. Pol. B. 58, 1944.
- G. Sima (O. Ghibu): Școala romînească din Transilvania și Ungaria. B. 1915. Rev. Inv.
- I. Simionescu: Oameni aleși II B. 1938.
- G. Șincai: Indreptare către Aritmetică, Blaj, 1785. Bibl. Fac. Mat. B.
- Virgil Șotropa N. Drăgan: Istoria școalelor născute. Născut. 1913.
- Avksentii Stadnițkii: Amflohii. episkop hotinskii. Kișinău. 1891.
- Teodor Stamati: Memoriu cu privire la starea și organizarea învățămîntului public în Moldova, înainte de 1846. Convorbiri literare. 43, 1909, p. 990.
- D. A. Stan: Semicentenarul Gazetei Matematice: Gaz. Mat. 51, 1946, p. 500.
- Al. Stoenescu: Profesorul Andrei G. Ioachimescu. Gaz. Mat. 48, 1943, p. 90, 337, 433.
- S. Stoilov: David Emanuel. B. 1955.
- P. I. Suchar: Le problème général de l'inversion. Evreux. 1897.
- Petru Tămăian: Istoria seminarului și educației clerului diecezei romine unite din Oradea. Oradea 1930.
- A. Teodorescu: Aritmetica sau Învățătura Socotelilor. Iași, 1839.
- N. Teodorescu: Personalitatea lui Janos Bolyai. Gaz. Mat. Fiz. A. 12, 1960, p. 100.
- Ovidiu Țino: Corespondenții Gazetei Matematice. Gaz. Mat. vol. jubiliar B. 1935, p. 146.
- G. Țițeica: 1. Oeuvres. B. 1941. 2. Desvoltarea științelor matematice în România. Bul. Soc. Pol. 44, 1931, p. 1070. Repr. Natura, 21, 1932, nr. 3, 4. 3. Evoluția științelor matematice în țara noastră. Natura, 22, 1933. 4. Al 20-lea an al Gazetei Matematice. Gaz. Mat. 20, 1914, p. 9. 5. 25 ani de Gazetă Matematică. Gaz. Mat. 26, 1920, p. 11. 6. Rolul Gazetei Matematice în desvoltarea științelor matematice din România. Gaz. Mat. vol. jubiliar, B. 1935, p. 67. 7. Centenarul liceului din Craiova. Natura, 23, 1934, nr. 1. 8. Din viața și activitatea lui Spiru Haret. Discurs A. R. B. 1914. Repr. Rev. Inv. 9, 1914, p. 353. Repr. Natura. 9, 1914, p. 257, 289, Repr. Numerus. 1, 1935, p. 193.
- Al. Toth: Teorema lui Farkas Bolyai despre egalitatea figurilor plane. Gaz. Mat. Fiz. B. 7, 1956, p. 617.
- Emeric Toth: 1. Janos Bolyai B. 1954. 2. Farkas Bolyai. Savantul, profesorul, omul. Gaz. Mat. Fiz. A. 9, 1957, p. 105. 3. S-au împlinit 150 ani de la nașterea marelui matematician Ianoș Bolyai. Rev. Mat. Fiz. 4, 1953, p. 2.
- Miltiade Tzony: Universitatea din Iași și fundatoarele său. Iași 1877.
- V. A. Urechii: 1., 2., 3. Istoria școalelor de la 1800 la 1864. vol. 1, 2, 3, B. 1892—94. 4. Istoria școalelor. Documente. B. 1901.
- V. Vălcovici: 1. Spiru Haret, Gaz. Mat. 48, 1943, p. 241. 2. Anton Davidoglu Gaz. Mat. Fiz. A. 10, 1958, p. 504.
- N. Vasilescu-Karpen: Școala Politehnică. B. 1929.
- Teofil Vescan: Aspecte din desvoltarea științelor fizice în România. În vol. Bibliografia fizicii romînești B. 1957, p. 11.
- A. Vițu: 1. Studiu asupra învățămîntului secundar din România. B. 1888. 2. Cuvîntare rostită la înmormîntarea lui Dim. Petrescu. Bul. Soc. Amicii Șt. Mat. 1, 1896, p. 126.
- G. Vranceanu: 1. Cuvînt înainte la volumul Ianoș Bolyai: Appendix. B. 1954. 2. Opera științifică a lui Gheorghe Țițeica. În vol. Gh. Țițeica B. 1955.
- G. Vranceanu și O. Onicescu: La vie et l'oeuvre de Georges Țițeica. În vol. Oeuvres de G. Țițeica B. 1941.

- Iu liu Vuia: **1.** Școalele românești bănățene în sec. XVIII. Orăștie 1896. **2.** Fragmente din istoricul pedagogicului conf. gr. ort. român din Arad. Panciova, 1887.
Karl Walstein: Elemente de desen și arhitectură. B. 1836. Bibl. Academiei.
A. D. Xenopol: **1—12.** Istoricul românilor din Dacia traiană. Iași. 1896.
13. Memoriu asupra învățământului superior în Moldova. Iași. 1885.

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ В НАШЕЙ СТРАНЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

На основе различных материалов, напечатанных в связи со школами, преподавательским составом, учебниками, учебными программами, периодическими публикациями и математическими работами в настоящей статье даётся краткий обзор развития математической науки в нашей стране до 1900 года.

LES DÉBUTS MATHÉMATIQUES EN NOTRE PAYS

RÉSUMÉ

Coup d'oeil appuyé sur des matériaux imprimés, en notre pays, du commencement jusqu'en 1900 sur les écoles, les professeurs, les manuels, les programmes, les périodiques et les oeuvres mathématiques.

INTERPRETAREA ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN CU O DIMENSIUNE ÎN PLUS, A GEOMETRIEI LUI LOBACEVSKI

N. MIHĂILEANU

Am arătat [1] că planul lui Lobacevski poate să fie interpretat pe o pînză a unui iperboloid din spațiul euclidian. Într-o notă mai dezvoltată [2] Maria Neumann a precizat că această interpretare este o proiecție pe iperboloid a modelului Klein. Geometriei lui Lobacevski i s-au dat foarte multe interpretări [3]. În fond, chiar ideia reprezentării geometriei iperbolice pe o cuadrică reală aparține lui Poincaré și ea a primit diverse alte precizări. Astfel modelul nostru pe iperboloid se încadrează într-o interpretare mai largă, datorită lui V. Kagan [4]. Ea nu este esențial diferită nici de interpretarea dată de H. Coxeter [5].

Totuși varianta noastră simplă face intuitive multe proprietăți de geometrie iperbolică. În cele ce urmează vom da o interpretare a deplasărilor iperbolice și vom face o aplicație asupra oriciclului. Pe o cale analogă vom interpreta apoi pe un model euclidian, proprietățile orisferei.

*
* *
*

Pentru ușurința expunerii vom aminti noțiunile și rezultatele din nota [1].

Considerăm o pînză s a unui iperboloid cu două pînze, de centru O și conul său asimptot, c . Numim „punct” un punct al pînzei s . „Distanța” dintre două puncte M, M' este dată de

$$(MM') = c \ln (mm'uv) \quad (1)$$

m, m' fiind dreptele OM, OM' ; u, v sînt intersecțiile planului OMM' cu conul asimptot iar c o constantă care depinde de iperboloidul considerat. Absolutul neeuclidian se interpretează prin conica de la infinit, intersecția iperboloidului cu conul asimptot.

Numim „dreaptă” intersecția pînzei s cu un plan δ dus prin centrul O . „Unghiul” a două „drepte” d, d' determinate de planele δ, δ' este dat de

$$(d, d') = c' \ln (\delta\delta'\xi\eta) \quad (2)$$

ξ, η fiind planele tangente conului c duse prin intersecția planelor δ, δ' iar c' o constantă.

Numim „cerc“ intersecția pînzei s cu un plan arbitrar, π . Avem astfel trei feluri de cercuri. „Cercuri proprii“ sînt elipsele pînzei s , oricicle sînt parabolele și echidistantele sînt ramurile iperbolelor pînzei s . Dacă planul π taie pînza s după o elipsă, diametrul conjugat planului π taie pînza într-un punct I „centrul cercului“. Dacă planul π taie pînza s după o iperbolă, planul paralel cu π dus prin O taie pînza după „dreapta“ a , axa echidistantei.

La limită, cînd conul asimptot se reduce la un plan, geometria iperbolică asociată tinde către geometria plană euclidiană.

*
* *

Deplasările neeuclidiene plane pot să fie interpretate ca transformări proiective ale spațiului euclidian, care lasă fix iperboloidul.

$$-x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad (3)$$

Prin x, y, z am notat coordonatele omogene ale planului iperbolic, normate prin relația (3).

O „deplasare“ elementară este rotația în jurul axei Oz

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = -\beta x' + \alpha y', \quad z = z' \quad (4)$$

cu $\alpha = \cos \theta$, $\beta = \sin \theta$, θ arbitrar. O altă „deplasare“ elementară este rotația iperbolică

$$x = x', \quad y = \alpha y' + \beta z', \quad z = \beta y' + \alpha z' \quad (5)$$

unde

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad \beta = \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)$$

λ fiind arbitrar; sau cu $\lambda = e^\varphi$, $\alpha = \operatorname{ch} \varphi$, $\beta = \operatorname{sh} \varphi$.

O rotație iperbolică de axă Oy este de asemenea o „deplasare“ elementară. Aceste rotații fiind independente și produsul lor conținînd trei parametri ca și deplasările neeuclidiene, rezultă că o *deplasare neeuclidiană plană poate să fie interpretată ca un produs de rotații de axă Oz și de rotații iperbolice de axe Ox, Oy .*

În aceste „deplasări“ iperboloidul alunecă pe el însuși de-alungul conului asimptot. Originea euclidiană $(0, 0, 0)$ rămîne fixă. Originea neeuclidiană $(0, 0, 1)$, intersecția axei Oz cu pînza iperboloidului devine $(0, -\beta, \alpha)$ în rotația iperbolică (5). Transformarea (5) arată că $y + z$, $y - z$ sînt invarianți relativi, deci planele $y + z = 0$, $y - z = 0$ sînt invariante iar planele paralele cu ele se transformă în plane paralele. Generatoarele conului asimptot

$$x = t(y + z), \quad tx = y - z$$

se transformă în alte generatoare, pentru care $t' = \lambda t$.

*
* *

Considerăm un plan π paralel cu o generatoare g a conului asimptot. Diametrul conjugat lui e însăși generatoarea g , care taie pînza s în punctul

I de la infinit al generatoarei g . Planul π taie pînza s după o parabolă, care corespunde unui oriciclu iar punctul I corespunde centrului lui. Rezultă că *centrul unui oriciclu este un punct impropriu* (situat pe absolut). Totodată *oriciclu trece prin centrul său*.

Un plan π paralel cu o generatoare a conului asimptot își păstrează această proprietate prin rotațiile (4), (5); reciproc, două plane paralele cu cîte o generatoare a conului asimptot pot fi suprapuse prin rotațiile considerate. Deci o parabolă a pînzei (3) poate să fie suprapusă peste orice altă parabolă. Corespunzător pentru geometria iperbolică *oriciclurile sînt egale între ele*.

*
* *

De asemenea putem să interpretăm spațiul iperbolic pe o pînză a ipersuprafeței

$$-x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 1 \quad (6)$$

dintr-un spațiu euclidian cu patru dimensiuni. Deplasările neeuclidiene pot să fie interpretate ca un produs de transformări lineare euclidiene pentru care

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad t = t' \quad (7)$$

$$x = x', \quad y = y', \quad -z^2 + t^2 = -z'^2 + t'^2 \quad (8)$$

Transformările (7) depind de trei parametri, ai grupului ortogonal iar (8) și celelalte două analoge de cîte un parametru, al rotației iperbolice; avem deci șase parametri cu totul.

Un plan neeuclidian va fi interpretat ca secțiunea ipersuprafeței (6) cu un iperplan dus prin origine, adică o cuadrică cu centrul în origine din spațiul euclidian E_3 . O dreaptă a spațiului neeuclidian va fi interpretată ca intersecția ipersuprafeței (6) cu două iperplane duse prin origine, adică o conică cu centrul în origine. O sferă neeuclidiană are ca imagine în E_3 o cuadrică.

Prin considerații analoge celor precedente putem să deducem, de exemplu, că o orisferă este secțiunea ipercuadrice (6) printr-un plan 2—paralel cu iperconul asimptot, de exemplu

$$t = z + 1 \quad (9)$$

și să interpretăm orisfera ca un paraboloid eliptic

$$x^2 + y^2 = 2z \quad (10)$$

în spațiul euclidian. Deducem printr-un procedeu asemănător că *toate orisferele sînt egale*.

Centrul orisferei este punctul de la infinit al axei Oz . Secțiunile orisferei prin plane

$$y = mx + n \quad (11)$$

ce trec prin centru sînt oricicluri. Deci *oriciclurile orisferei pot să fie interpretate euclidian ca secțiuni verticale ale paraboloidului* (10). Pozițiile acestor secțiuni sînt pozițiile dreptelor (11) din planul xOy . Rezultă că *oriciclurile se comportă pe orisferă ca dreptele din plan*.

Spațiul ambiant (6) în care este scufundat paraboloidul induce pe acest paraboloid metrica iperbolică

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$$

dar din (9) rezultă

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (12)$$

Interpretarea noastră face intuitivă proprietatea remarcabilă a orisferei: *pe orisferă este valabilă o geometrie euclidiană, dacă interpretăm oriciclurile ca dreptele ale planului euclidian și măsurăm arcele și unghiurile euclidiene prin formulele lor din geometria iperbolică*.

La două puncte $N_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $N_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ de pe orisferă corespund punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ de pe paraboloidul (10). Dreptei neeuclidiene N_1N_2 îi corespunde intersecția paraboloidului cu planul OM_1M_2 . Distanța N_1N_2 sau lungimea (neeuclidiană) a arcului M_1M_2 de pe conica de secțiune este dată de

$$\operatorname{ch} M_1M_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$$

folosind relațiile (9) apoi (10) rezultă

$$\operatorname{ch} M_1M_2 = 1 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2 \quad (13)$$

sau

$$\operatorname{sh} \frac{\delta}{2} = \frac{d}{2} \quad (14)$$

d fiind distanța euclidiană dintre proiecțiile punctelor M_1, M_2 pe planul xOy iar δ distanța neeuclidiană dintre punctele M_1, M_2 .

BIBLIOGRAFIE

1. N. Mihăileanu: *Interpretarea geometriei lui Lobacevski pe un iperboloid cu două pînze*. Comunicările Academiei R.P.R. tom. IV. 1954. p. 579—80.
2. Maria Neumann: *Despre interpretarea geometriei lui Lobacevski pe un iperboloid*. Buletin Științific. Mat. Fiz. Acad. R.P.R., vol. 6, 1954, p. 861—71.
3. B. Rozenfeld: *Interpretații geometrii Lobacevskogo*. Istoriko-matematicheskie issledovaniia. IX. 1956, p. 169—208.
4. V. F. Kagan: *Osnovaniia geometrii*. II. Moskva. 1956, p. 317—21.
5. H. S. M. Coxeter: Math. Rev. 16, 1955, p. 1045.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Можно интерпретировать орисферу как эллиптический параболоид (10) E_3 . Сечения орисферы плоскостями (11) соответствуют орициклам. Таким образом свойства орисферы становятся наглядными.

INTERPRÉTATION DE LA GÉOMÉTRIE DE LOBACEVSKI DANS UN ESPACE EUCLIDIEN AYANT UNE DIMENSION DE PLUS

RÉSUMÉ

On peut interpréter l'horispère comme un paraboloides elliptique (10) dans E_3 . Les sections de l'horispère par des plans (11) correspondent à des horicycles. On peut établir ainsi intuitivement les propriétés de l'horispère.

METODA CONGRUENȚELOR PSEUDO-ORTOGONALE ÎN TEORIA RELATIVITĂȚII, I

ION D. TEODORESCU

Lucrarea are un caracter de sinteză și expune unele rezultate cunoscute privind folosirea metodei congruențelor pseudo-ortogonale în teoria relativității și a unor teorii unitare.

Se știe că teoria relativității, dezvoltată de A. Einstein în 1915, consideră că spațiul fizic este un spațiu riemannian cuadridimensional V_4 cu metrică indefinită (continuum-ul „spațiu timp”). Teoria conduce la concepția, formulată de N. I. Lobacevski încă în 1826, că structura geometrică a spațiului V_4 este determinată de distribuția și mișcarea materiei, adică proprietățile, formele spațio-temporale ale realității obiective nu sînt forme apriorice, ci forme de existență obiective ale ei. Cu alte cuvinte, numai experiența poate să ne conducă la cunoașterea structurii geometrice a spațiului în care trăim. În cazul particular cînd distribuția materiei este minimă (spațiul ar fi „vid” de materie), V_4 se reduce la spațiul pseudoeuclidian cuadridimensional E_4 al lui H. Minkovski, de semnătură — — — +, considerat în teoria restrînsă a relativității.

Or, aparatul matematic utilizat în mod curent în teoria relativității este *calculul diferențial absolut de coordonate*, care studiază proprietățile diferitelor obiecte geometrice (vectori, tensori, conexiuni etc.) ce sînt invariante în raport cu transformările de coordonate.

Acest calcul a fost creat de G. Ricci și T. Levi-Civita [1], ca urmare a studiului geometriilor introduse în 1854 de B. Riemann (anume o nouă geometrie neeuclidiană și ceea ce numim astăzi spațiile riemanniene V_n — cu metrică pozitiv definită —) și dezvoltat de T. Levi-Civita, H. Weyl, O. Veblen, L. Ph. Eisenhart, J. A. Schouten și alții.

Introducerea congruențelor de curbe ale spațiilor riemanniene V_n cu n dimensiuni, de către G. Ricci și T. Levi-Civita [2] și folosirea sistemului de congruențe independente ca sistem de referință, au permis ca aceste spații să reîntre într-un mod cu totul natural, în programul de la Erlangen al lui F. Klein (1872), ca spațiile unui grup ortogonal de transformări de congruență. *Calculul diferențial absolut de congruențe* — care studiază proprietățile diferitelor obiecte geometrice ce rămîn invariante în raport cu transformările de congruențe — și caracterizarea spațiilor

prin transformări de congruențe sînt datorite lui G. Vrănceanu [3], [4]. Pe de altă parte, calculul congruențelor permite o apropiere de calculul formelor exterioare al lui E. Cartan.

Congruențele pseudo-ortogonale într-un spațiu riemannian V_n cu metrică indefinită au fost considerate de L. Ph. Eisenhart ([5], cap. III) și de G. Vrănceanu [6], (vezi și [4], cap. V, § 2). Se poate arăta că diferite mărimi, construite cu ajutorul conexiunii afine asociate congruențelor pseudo-ortogonale ale lui Eisenhart (conexiunea asociată coincide cu simbolii lui Ricci cu trei indici din sistemele de congruențe ortogonale), nu sînt invariante față de o transformare de congruențe. Acest inconvenient este înlăturat dacă se folosesc congruențele pseudo-ortogonale ale lui Vrănceanu.

Congruențele pseudo-ortogonale ale lui Eisenhart au fost folosite de T. Levi-Civita [7] în sistematizarea dată primei teorii unitare a lui A. Einstein iar cele ale lui Vrănceanu au fost utilizate în teoria unitară neolonomă [6], [8]¹.

De asemenea, în [9], [10], I. B. Rumer consideră o schemă de calcul tensorial, adaptat pentru „5-optică” și care permite o formulare covariantă a ecuațiilor spinoriale ale fizicii. Schema coincide cu metoda congruențelor ortogonale într-un spațiu riemannian V_n , (metodă dată de R. Ricci și T. Levi-Civita [2]).

Vom diviza această lucrare în două părți:

În prima parte, sînt expuse unele rezultate privind spațiile riemanniene V_n cu metrică indefinită, folosindu-se metoda congruențelor pseudo-ortogonale dezvoltată de G. Vrănceanu, metodă ce permite să se studieze diferite proprietăți ale acestor spații fără a face apel la cantitățile imaginare. Sînt tratate probleme ca: congruențele pseudo-ortogonale în V_n , conexiunea afină a spațiului, analiza tensorială, izometriile spațiului, probleme variaționale ș.a.

În partea a doua², se folosește metoda congruențelor pseudo-ortogonale în teoria relativității. Apoi, se dau ecuațiile cîmpului teoriei conforme a reciprocității, teorie unitară dezvoltată de A. Popovici [11], folosindu-se un spațiu riemannian V_6 cu metrică indefinită, de semnătură $+++--$. Studiul este făcut în cazul cilindricității potențialelor metrice în raport cu coordonatele suplimentare x^λ ($\lambda = 5, 6$) și fără a considera proprietățile conforme ale spațiului.

*
* *
*

1. *Spațiile riemanniene cu metrică indefinită.* Fie V_n un spațiu riemannian n -dimensional cu metrică indefinită.

¹ În lucrările sale asupra teoriei unitare neolnome, K. Yano, se folosește de calculul diferențial absolut de coordonate; de exemplu vezi „Sur la théorie unitaire non holonome des champs”, Proceedings of the Physico-Matematical Society of Japon, vol. 19, pp. 867–896, 945–976, 1937.

² Se va publica în alt număr al acestei reviste.

Un spațiu al lui Riemann V_n cu n dimensiuni, a cărui metrică este dată prin formula

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

($a_{ij} = a_{ji}$ sînt funcții reale continue și derivabile de variabilele reale $x^1, x^2, \dots, x^n$, cu determinantul $a = |a_{ij}|$ diferit de zero), se zice că este cu *metrică indefinită* dacă forma pătratică (1) nu este definită pozitiv.

În acest caz, dacă $P(x^i)$ și $Q(x^i + dx^i)$ sînt două puncte infinit vecine ale spațiului V_n , lungimea ds a segmentului PQ nu este întotdeauna o cantitate reală, adică există deplasări PQ a căror distanță ds este reală, imaginară sau nulă. Deci, dacă în punctul $P(x^i)$ al lui V_n se dă un vector contravariant V^i , lungimea V a vectorului este dată de formula

$$V^2 = a_{ij} V^i V^j$$

și poate fi reală, imaginară sau nulă. Dacă $V^2 = \pm 1$, se spune că vectorul V^i este unitar.

Fiind dați V^i și U^i doi vectori de lungimi nenule, cu ajutorul lor se poate defini un invariant I real prin formula [4, p. 256]

$$\sqrt{\varepsilon V^2 U^2} \cdot I = a_{ij} V^i U^j,$$

unde $\varepsilon = \pm 1$ după cum vectorii sînt ambii de lungime reală (imaginară) sau nu. Dacă $I = 0$, spunem că vectorii V^i și U^i sînt *pseudoortogonali* (în analogie cu faptul că, dacă spațiul V_n este cu metrică pozitiv definită, putem lua $I = \cos \theta$, numind θ unghiul celor doi vectori, deoarece $|I| \leq 1$, încît dacă $I = 0$ atunci vectorii nenuli V^i și U^i sînt ortogonali și reciproc).

2. *Congruente pseudo-ortogonale în V_n* . Să considerăm în spațiul V_n un sistem de n congruențe de curbe independente (λ) , pentru care μ_a^i sînt parametrii și λ_j^a momentele, între parametrii și momentele sistemului de congruențe existînd relațiile [2], [4, cap. I, § 5]

$$\mu_a^i \lambda_j^a = \delta_j^i, \quad \mu_b^i \lambda_i^a = \delta_b^a, \quad (a, b, c, \dots = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

$$(\lambda = |\lambda_i^a| \neq 0, \quad |\mu_a^i| = \lambda^{-1})$$

Rezultă imediat că

$$\frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^k} \mu_b^i = - \frac{\partial \mu_b^i}{\partial x^k} \lambda_i^a, \quad \frac{\partial \mu_a^i}{\partial x^k} \lambda_j^a = - \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^k} \mu_a^i \quad (2')$$

iar

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^i} = \lambda \mu_a^j \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^i} \quad (2'')$$

Deci sistemului de congruențe (λ) i se asociază n forme Pfaff

$$ds^a = \lambda_i^a dx^i, \quad (3)$$

formele ds^a fiind luate ca diferențiale ale arcelor pe cele n congruențe $(\lambda_a)^*$. Formulele (3) pot fi rezolvate în raport cu dx^i și avem

$$dx^i = \mu_a^i ds^a \quad (3')$$

Dacă sistemul de congruențe (λ) este format din congruențe nenule, adică parametrii μ_a^i (care definesc aceste congruențe) sînt componentele a n vectori contravarianți de lungime nenulă, avem

$$(\mu_a)^2 = a_{ij} \mu_a^i \mu_a^j \neq 0 \quad (a \text{ fix})$$

Presupunem că spațiul V_n admite numai p vectori de lungime reală liniar independenți, și deci $n - p$ vectori de lungime imaginară liniar independenți ($p \leq n$; cazul $p = n$ are loc numai dacă metrica spațiului V_n este pozitiv definită și este de altfel cazul considerat de Riemann). Deoarece parametrii unei congruențe de curbe sînt determinanți abstracție făcînd de un factor de proporționalitate, putem multiplica parametrii μ_a^i ai congruenței (λ_a) cu un același factor $\rho(x^1, x^2, \dots, x^n)$ convenabil, astfel încît vectorul contravariant μ_a^i să fie unitar. Deci putem lua**

$$(\mu_\alpha)^2 = +1, \quad (\mu_\nu)^2 = -1 \quad (3'')$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, p; \nu, \tau, \omega, \dots = p+1, \dots, n)$$

după cum cei n vectori contravarianți μ_a^i ($a = 1, 2, \dots, n$) au lungimea reală sau imaginară. În plus, presupunem că congruențele (λ) sînt pseudo-ortogonale două cîte două, adică

$$a_{ij} \mu_a^i \mu_b^j = 0 \quad (a \neq b) \quad (3^{VI})$$

Condițiile (3^{II}) și (3^{III}) se mai pot scrie

$$a_{ij} \mu_a^i \mu_b^j = \varepsilon_{ab}, \quad (4)$$

unde

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon^{ab} = \begin{cases} +1 & \text{dacă } a = b = \alpha \\ -1 & \text{,, } a = b = \nu, \\ 0 & \text{,, } a \neq b \end{cases} \quad (\varepsilon_{bc} \varepsilon^{ac} = \delta_b^a). \quad (5)$$

* În adevăr, dacă toate formele ds^a sînt nule în afară de una, de expl. ds^1 , adică dacă ne deplasăm pe prima congruență, formulele (3') dau

$$\frac{dx^1}{\mu_1^1} = \dots = \frac{dx^n}{\mu_1^n} = ds^1$$

și s^1 joacă rolul de parametri pe congruența (λ_1) .

** În cele ce urmează, fără a mai specifica de fiecare dată, vom considera că

$$i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$$

se referă la indici în sistemul de coordonate (x) , pe cînd

$a, b, c, \dots = 1, 2, \dots, n$; $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, p+1$; $\nu, \tau, \omega, \dots = p+1, \dots$, sînt indici pe congruențele pseudo-ortogonale (λ) în V_n .

Întrucât λ_i^a și μ_a^i sunt egale și schimbate de semn cu acestea dacă $a = \nu$ și invers.

$$\lambda_i^a = \epsilon^{ab} a_{ij} \mu_b^j, \quad \mu_a^i = \epsilon_{ab} a^{ij} \lambda_j^b, \quad (6)$$

adică

$$\lambda_i^\alpha = a_{ij} \mu_\alpha^j, \quad \lambda_i^\nu = -a_{ij} \mu_\nu^j; \quad \mu_\alpha^i = a^{ij} \lambda_j^\alpha, \quad \mu_\nu^i = -a^{ij} \lambda_j^\nu. \quad (7)$$

Primele relații arată că momentele λ_i^a coincid cu componentele covariante ale momentelor μ_a^i dacă $a = \alpha$ și sînt egale și schimbate de semn cu acestea dacă $a = \nu$ și invers.

Un astfel de sistem de congruențe (λ) se numește un *sistem de congruențe pseudo-ortogonale* în spațiul V_n cu metrică indefinită [6]. Deci, rezultă *propoziția*:

Un sistem de n congruențe independente nenule (λ) constituie în spațiul lui Riemann V_n cu metrică indefinită (1), un sistem de congruențe pseudo-ortogonale dacă între parametrii μ_a^i și momentele λ_i^a ale acestor congruențe și coeficienții a_{ij} ai tensorului metric al spațiului V_n există relațiile (7).

Dacă raportăm metrica spațiului V_n la un sistem de congruențe pseudo-ortogonale (λ) , ținînd seama de (3') și (4), aceasta se reduce la forma canonică

$$ds^2 = \epsilon_{ab} ds^a ds^b = (ds^1)^2 + \dots + (ds^p)^2 - (ds^{p+1})^2 - \dots - (ds^n)^2, \quad (8)$$

adică la o sumă de p pătrate pozitive și n - p pătrate negative. Deci, între componentele a_{ij} ale tensorului metric în sistemul de coordonate (x) și componentele ϵ_{ab} ale aceluiași tensor în sistemul de congruențe pseudo-ortogonale (λ) există relațiile [6] [4, p. 261].

$$\begin{cases} a_{ij} = \epsilon_{ab} \lambda_i^a \lambda_j^b = \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha - \lambda_i^\nu \lambda_j^\nu, & \epsilon_{ab} = a_{ij} \mu_a^i \mu_b^j, \\ a^{ij} = \epsilon^{ab} \mu_a^i \mu_b^j = \mu_\alpha^i \mu_\alpha^j - \mu_\nu^i \mu_\nu^j, & \epsilon^{ab} = a^{ij} \lambda_i^a \lambda_j^b. \end{cases} \quad (9)$$

Dacă matricea $||\lambda_i^a||$ este diagonală, elementele ei λ_i^h sînt coeficienții lui Lamé și de aceea, după I. B. Reimer [10, p. 109], poate fi numită *matricea metrică a lui Lamé*.

Deci, rezultă *propoziția*:

Fiind dat un sistem de n forme Pfaff independente (3), putem asocia acestui sistem un singur spațiu al lui Riemann V_n cu metrică indefinită, de semnătură dată, în care sistemul de congruențe (3'), atașat formelor Pfaff (3), să fie un sistem de n congruențe (nenule independente) pseudo-ortogonale: este spațiul a cărui metrică este dată de formula (8) iar coeficienții a_{ij} sînt definiți prin relațiile (9).

Se observă că, fiind dat un sistem de n forme Pfaff independente, abstracție făcând de schimbarea semnului metricii, putem asocia acestui sistem $q \leq \frac{n}{2}$ spații riemanniene V_n cu metrică indefinită după signatura metricii: $p = n - q$ pătrate pozitive și q pătrate negative. Dacă $q = 0$ (deci $p = n$), metrica spațiului V_n este pozitiv definită.

Reciproc, fiind dat un spațiu Riemann V_n cu metrică indefinită (1), se poate considera în acest spațiu o infinitate de sisteme de congruențe pseudo-ortogonale, la care raportându-se metrica spațiului, aceasta să ia forma canonică (8), iar coeficienții tensorului metric (5) pe sistemul de congruențe pseudo-ortogonale să fie date de (9). Aceasta este posibil, deoarece reducerea formei pătratice (1) la forma canonică (8) se poate face într-o infinitate de feluri. În adevăr, transformările de congruență

$$d\bar{s}^a = c_b^a ds^b \quad (d\bar{s}^a = \bar{\lambda}_i^a dx^i, \quad ds^a = \lambda_i^a dx^i) \quad (10)$$

unde c_b^a sînt funcții de $x^1, x^2, \dots, x^n$ și cu determinantul $|c_b^a|$ diferit de zero, păstrează forma canonică (8) dacă coeficienții c_b^a satisfac condițiile de pseudo-ortogonalitate

$$\epsilon_{fg} c_a^f c_b^g = \epsilon_{ab} \quad (c_a^a c_b^a - c_a^b c_b^a = \epsilon_{ab}) \quad (10')$$

Aceste transformări constituie ceea ce se poate numi *grupul pseudo-ortogonal* de transformări de congruențe și se vede ușor că el conține $\frac{n(n-1)}{2}$ funcții [6], [4, p. 261]. Rezultă deci *propoziția*.

Un spațiu al lui Riemann V_n cu metrică indefinită poate fi considerat ca spațiul unui grup pseudo-ortogonal al unui sistem de congruențe.

3. *Calculul diferențial absolut de congruențe.* Dacă

$$t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \quad (11)$$

sînt componentele unui tensor de p ori contravariant și de q ori covariant pe congruențele (λ) , la o transformare de congruență (10), ele se transformă după legea [4, p. 54]

$$\bar{t}_{\bar{d}_1 \dots \bar{d}_q}^{\bar{c}_1 \dots \bar{c}_p} c_{b_1 \dots b_q}^{d_1 \dots d_q} = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} c_{a_1 \dots a_p}^{c_1 \dots c_p}, \quad (12)$$

unde

$$\bar{t}_{\bar{d}_1 \dots \bar{d}_q}^{\bar{c}_1 \dots \bar{c}_p} \quad (11')$$

sînt componentele tensorului pe congruențele $(\bar{\lambda})$.

Formulele (12) pot fi rezolvate fie în raport cu componentele (11), fie în raport cu componentele (11') ale tensorului.

Din (10) rezultă că

$$\bar{\lambda}_i^a = c_b^a \lambda_i^b, \quad \bar{\mu}_a^i = \mu_b^i c_b^a, \quad (13)$$

ceea ce arată că, în raport cu transformările de congruențe, λ_i^a constituie n vectori contravarianți ($i = 1, 2, \dots, n$), pe cînd μ_a^i sînt n vectori covarianți ($i = 1, 2, \dots, n$).

Se știe că, într-un spațiu Riemann nesingular, noțiunea de tensor capătă un caracter general, deoarece putem transforma întotdeauna, cu ajutorul tensorului metric, un indice de contravarianță într-unul de covarianță și reciproc. De exemplu, dacă v^a sînt componentele unui vector contravariant pe congruențele (λ) , putem să-i asociem vectorul covariant v_a prin formulele

$$v_a = \varepsilon_{ab} v^b \quad (14)$$

și invers

$$v^a = \varepsilon^{ab} v_b \quad (14')$$

Atunci, obținem că

$$v_\alpha = v^\alpha, \quad v_\nu = -v^\nu. \quad (14'')$$

Rezultă că componentele covariante ale unui vector coincid cu componentele contravariante ale aceluiași vector, dacă $a = \alpha$, sau sînt egale și schimbate de semn dacă $a = \nu$. Deci, se poate enunța *legea de transformare a indicilor de covarianță și contravarianță unul în altul pentru un tensor dat*:

Intr-un sistem de congruențe pseudo-ortogonale (λ) în spațiul V_n cu metrică indefinită (8), ori de cîte ori transformăm un indice $a = \alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, p$), componentele covariante și contravariante omoloage ale unui tensor coincid, pe cînd transformarea unui indice $a = \nu$ ($\nu = p + 1, \dots, n$) schimbă de semn componentele tensorului.

Dacă d, δ sînt două serii de diferențiale, se spune că

$$\Delta s^a = \delta ds^a - d\delta s^a$$

sînt covarianții biliniari ai formelor Pfaff (3). Obținem [4, p. 48]

$$\Delta s^a = W_{bc}^a ds^b \delta s^c$$

unde

$$W_{bc}^a = \left(\frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^i} \right) \mu_b^i \mu_c^j = \left(\frac{\partial \mu_c^i}{\partial s^b} - \frac{\partial \mu_b^i}{\partial s^c} \right) \lambda_i^a \quad (15)$$

sînt coeficienții acestor covarianți biliniari.

Aplicînd formulelor (10) operatorul covariantului biliniar, vom obține

$$\Delta \bar{s}^a = \left(\frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} - \frac{\partial c_c^a}{\partial s^b} \right) ds^b \partial s^c + c_b^a \Delta s^b.$$

Ținând seama de (15), găsim formulele

$$\frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} - \frac{\partial c_c^a}{\partial s^b} = \bar{w}_{df}^a c_b^d c_c^f - w_{bc}^f c_f^a, \quad (15')$$

care se mai numesc *formulele fundamentale* în calculul de congruențe [4, p. 52]. Ele arată că w_{bc}^a nu constituie componentele unui tensor.

Operatorii liniari [4, p. 48]

$$X_a = \mu_a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial s^a} \quad (16)$$

definiți de congruențele pseudo-ortogonale (λ) , formează un sistem complet, adică parantezele lui *Poisson* se exprimă liniar cu ajutorul operatorilor dați. În adevăr, obținem

$$(X_a, X_b) = w_{ab}^c X_c, \quad (16')$$

sau încă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^a \partial s^b} - \frac{\partial^2 f}{\partial s^b \partial s^a} = w_{ab}^c \frac{\partial f}{\partial s^c}. \quad (16'')$$

Atunci, identitățile lui *Iacobi* [4, p. 44]

$$[X_a, (X_b, X_c)] + [X_b, (X_c, X_a)] + [X_c, (X_a, X_b)] = 0$$

ne conduc la următoarele relații între coeficienții w_{bc}^a ai formelor *Pfaff* (3):

$$(abcd) = \frac{\partial w_{bc}^a}{\partial s^d} + \frac{\partial w_{cd}^a}{\partial s^b} + \frac{\partial w_{db}^a}{\partial s^c} + w_{df}^a w_{bc}^f + w_{bf}^a w_{cd}^f + w_{cf}^a w_{db}^f = 0, \quad (16''')$$

numite și *identitățile fundamentale* ale calculului de congruențe. Ele arată că un sistem de cantități w_{bc}^a nu poate fi considerat drept sistemul coeficienților covarianților biliniari Δs^a a în forme *Pfaff* ds^a dacă w_{bc}^a nu satisfac condițiile (16''').

4. *Componentele conexiunii afine.* Conexiunea afină a spațiului riemannian V_n cu metrică nesingulară este dată de conexiunea lui Levi-Civita. Transportul paralele corespunzător, transportul paralele al lui Levi-Civita, al spațiului V_n este caracterizat prin condițiile de a închide paralelogramele infinitezimale și de a păstra lungimile. Ele exprimă faptul că conexiunea afină este simetrică și că derivatele covariante ale tensorului metric cu ajutorul conexiunii afine sînt nule.

Spațiul V_n este cu conexiune simetrică, dacă tensorul de torsione t_{bc}^a este nul; deci dacă [4, p. 192]

$$t_{bc}^a = \gamma_{bc}^a - \gamma_{cb}^a - w_{bc}^a = 0, \quad (17)$$

unde γ_{bc}^a sînt componentele conexiunii lui Levi-Civita pe un sistem de congruențe pseudo-ortogonale (λ) în spațiul V_n cu metrică indefinită (8).

Știm că derivatele covariante ale tensorului (11) cu ajutorul conexiunii γ_{bc}^a sînt¹.

$$t_{b_1 \dots b_q, c}^{a_1 \dots a_p} = \frac{\partial t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}}{\partial s^c} - \gamma_{rc}^a t_{b_1 \dots b_q}^{r \dots a_p} - \dots - \gamma_{rc}^a t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots r} + \\ + \gamma_{b_1 c}^r t_{r \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} + \dots + \gamma_{b_q c}^r t_{b_1 \dots r}^{a_1 \dots a_p} \quad (18)$$

Uneori această expresie este numită *derivata invariantă* a tensorului (11) [10, p. 115]. Atunci dacă derivatele covariante ale tensorului metric ε_{ab} sînt nule, obținem

$$\varepsilon_{ab, c} = \varepsilon_{rb} \gamma_{ac}^r + \varepsilon_{ar} \gamma_{bc}^r = 0 \quad (19)$$

deoarece $\frac{\partial \varepsilon_{ab}}{\partial s^c} = \frac{\partial \varepsilon_{ab}}{\partial x^i} \mu_c^i = 0$. Formulele (19) se mai scriu [6], [4, p. 267]

$$\gamma_{\beta c}^\alpha + \gamma_{\alpha c}^\beta = 0, \quad \gamma_{\alpha c}^\nu - \gamma_{\nu c}^\alpha = 0, \quad \gamma_{\tau c}^\nu + \gamma_{\nu c}^\tau = 0, \quad (19')$$

ceea ce arată că *componentele conexiunii lui Levi-Civita într-un sistem de congruențe pseudo-ortogonale* (λ) *în spațiul V_n cu metrică indefinită* (8) *sînt strîmb simetrice în indicii a și b cînd ambii indici variază simultan de la 1 la p sau de la $p+1$ la n și sînt simetrici în acești indici cînd unul variază de la 1 la p iar celălalt de la $p+1$ la n .*

Formulele (17) și (19) se pot rezolva în raport cu γ_{bc}^a . În adevăr, relațiile (17) pot fi scrise astfel

$$\varepsilon_{ra} \gamma_{bc}^r - \varepsilon_{ra} \gamma_{cb}^r = \varepsilon_{ra} w_{bc}^r$$

¹ În spațiul riemannian V_n , dacă este dat transportul paralel al unui vector contravariant rezultă și transportul paralel al unui vector covariant, și reciproc. În adevăr, fie

$$Dv^a = dv^a - \gamma_{fg}^a v^f ds^g.$$

Însă, conform cu (14) și ținînd seama de (17), avem

$$Dv_a = \varepsilon_{ab} Dv^b = \varepsilon_{ab} (dv^b - \gamma_{fg}^b v^f ds^g) = d(\varepsilon_{ab} v^b) - \varepsilon_{ab} \gamma_{fg}^b v^f ds^g = dv_a + \varepsilon_{fb} \gamma_{ag}^b v^f ds^g = \\ = dv_a + \gamma_{ag}^b v_b ds^g$$

De asemenea, avem $Dv^a = \varepsilon^{ab} Dv_b$. Deci, propoziția se demonstrează folosind faptul că $D\varepsilon_{ab} = 0$, adică conexiunea γ_{bc}^a păstrează lungimile vectorilor transportați prin paralelism de-a lungul unei deplasări infinitezimale ds^a . În adevăr, lungimea v a vectorului v^a este dată de formula

$$v^2 = \varepsilon_{ab} v^a v^b.$$

Diferențiind absolut și știind că $Dv = dv$, iar $Dv^a = 0$ (vectorul se transportă prin paralelism), avem

$$2vdv = D\varepsilon_{ab} v^a v^b + \varepsilon_{ab} Dv^a \cdot v^b + \varepsilon_{ab} v^a Dv^b = D\varepsilon_{ab} \cdot v^a v^b$$

Deci $dv = 0$ (variația lungimii vectorului transportat prin paralelism este nulă) dacă $D\varepsilon_{ab} = 0$.

Făcînd o permutare ciclică a indicilor a, b, c și adunîndu-le, și ținînd seama de relațiile (19), obținem formulele:

$$\varepsilon_{ar} \gamma_{bc}^r = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ar} w_{bc}^r + \varepsilon_{br} w_{cd}^r + \varepsilon_{cr} w_{ba}^r) \quad (20)$$

ceea ce arată că valorile γ_{bc}^a se pot exprima în funcție numai de coeficienții w_{bc}^a ai covarianților biliniari cu formele Pfaff ds^a și de metrică (5) a spațiului V_n . Coeficienții γ_{bc}^a , dați de formulele (20), se mai numesc *pseudo-coeficienții de rotație ai lui Ricci* față de pseudo-congruențele (λ) în spațiul V_n . Deci, rezultă *propoziția* [6].

Conexiunea afină γ_{bc}^a a lui Levi-Civita a spațiului lui Riemann V_n cu metrică indefinită (8) are drept componente pe congruențele pseudo-ortogonale (λ) din V_n chiar pseudo-coeficienții de rotație ai lui Ricci față de aceste congruențe.

Dacă multiplicăm formulele (20) cu ε^{ar} și sumăm în raport cu indicele a , obținem

$$\gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} (w_{bc}^a + \varepsilon^{aj} \varepsilon_{bg} w_{cf}^g + \varepsilon^{aj} \varepsilon_{cg} w_{bf}^g). \quad (20')$$

Ținînd seama de (2') și (2''), din (20') rezultă

$$\gamma_{ba}^a = w_{ba}^a = - \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s^b} + \frac{\partial \mu_b^i}{\partial s^a} \lambda_i^a \right). \quad (20'')$$

Față de transformările de congruență (10), conexiunea afină γ_{bc}^a se transformă după legea [4, p. 173]

$$\frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} = \bar{\gamma}_{fg}^a c_b^f c_c^g - \gamma_{bc}^f c_f^a. \quad (21)$$

Atunci, derivînd formulele (10'), obținem

$$\varepsilon_{fg} \frac{\partial c_a^f}{\partial s^c} c_b^g + \varepsilon_{fg} \frac{\partial c_b^g}{\partial s^c} c_a^f = 0;$$

dacă ținem seama de (10') și (20), aceste relații se scriu

$$(\varepsilon_{ab} \bar{\gamma}_{rs}^a + \varepsilon_{ar} \bar{\gamma}_{bs}^a) c_d^r c_f^s c_g^b = \varepsilon_{rg} \gamma_{df}^r + \varepsilon_{rd} \gamma_{gf}^r$$

Ele sînt identic satisfăcute, oricare ar fi sistemul de congruențe pseudo-ortogonale (λ) în V_n , dacă avem (19).

Deci ținînd seama de (17) formulele fundamentale (15') pot fi rezolvate în raport cu derivatele $\frac{\partial c_b^a}{\partial s^c}$, prin expresii de forma (21).

5. *Analiza tensorială.* Fie doi vectori covarianți u_a, v_a și un tensor dublu covariant strîmb simetric $v_{ab} = -v_{ba}$. Cu acești tensori putem construi doi tensori strîmb simetrici în orice pereche de indici [8, p. 34]

$$a_{ab} = u_a v_b - u_b v_a, \quad (22)$$

$$a_{abc} = u_a v_{bc} + u_b v_{ca} + u_c v_{ab} \quad (22')$$

Însă, dacă vectorul u_a este operatorul „nabla”

$$u_a = \frac{\partial}{\partial s^a} \quad (23)$$

expresiile (22) și (22') sînt mărimi tensoriale numai într-un sistem de coordonate. În adevăr, la o transformare de congruențe (10), avem

$$a_{ab} = \bar{a}_{cd} c_a^c c_b^d + \bar{v}_d \left(\frac{\partial c_a^d}{\partial s^b} - \frac{\partial c_b^d}{\partial s^a} \right), \quad (22'')$$

$$\begin{aligned} a_{abc} = & \bar{a}_{def} c_a^d c_b^e c_c^f + \bar{a}_{df} \left(\frac{\partial c_b^d}{\partial s^e} - \frac{\partial c_e^d}{\partial s^b} \right) c_c^f + \bar{a}_{df} \left(\frac{\partial c_a^d}{\partial s^e} - \frac{\partial c_e^d}{\partial s^a} \right) c_b^f + \\ & + \bar{a}_{df} \left(\frac{\partial c_c^d}{\partial s^e} - \frac{\partial c_e^d}{\partial s^c} \right) c_a^f. \end{aligned} \quad (22''')$$

Dacă

$$\frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} - \frac{\partial c_c^a}{\partial s^b} = 0, \quad (24)$$

adică ds^a și ds^a ar fi diferențialele totale exacte, transformarea (10) fiind o transformare de coordonate

$$\bar{s}^a = s^a (s^1, s^2, \dots, s^n),$$

atunci expresiile (22) și (22') ar constitui mărimi tensoriale. Totuși dacă în (22'') și (22''') se ținea seama de formulele fundamentale (15') ale calculului diferențial absolut de congruențe putem obține următorii tensori strîmb simetrici în orice pereche de indici [8, p. 34].

$$\text{rot}_b v_a = \frac{\partial v_a}{\partial s^b} - \frac{\partial v_b}{\partial s^a} + w_{ab}^f v_f, \quad (25')$$

$$\text{rot}_c v_{ab} = \frac{\partial v_{ab}}{\partial s^c} + \frac{\partial v_{bc}}{\partial s^a} + \frac{\partial v_{ca}}{\partial s^b} + v_{cf} w_{ab}^f + v_{af} w_{bc}^f + v_{bf} w_{ca}^f. \quad (25'')$$

Vom numi tensorul (25) *rotorul unui vector covariant*, iar tensorul (25') *rotorul unui tensor dublu covariant strîmb simetric*, observînd că dacă condițiile (24) sînt satisfăcute, în care caz w_{bc}^a și $\bar{w}_{bc}^a$ sînt nule, se cade peste noțiunile corespunzătoare din calculul diferențial absolut de coordonate.

Avem

$$\text{rot}_b (\text{grad}_a f) = 0, \quad (26)$$

$$\text{rot}_c (\text{rot}_a v_b) = 0, \quad (26')$$

unde

$$\text{grad}_a f = \frac{\partial f}{\partial s^a} \quad (27)$$

este vectorul covariant format din derivatele parțiale ale unui scalar $f = f(x^1, \dots, x^n)$ de-a lungul congruențelor (λ) în V_n , vector numit *gradientul unui scalar*.

Formulele (26), (26') rezultă imediat, dacă ținem seama de (16'') și (16'''). Noțiunea de rotor poate fi extinsă la un tensor covariant oarecare, strîmb simetric în orice indice. În adevăr, dacă $\xi_{a_1 \dots a_p}$ sînt componentele unui astfel de tensor de ordinul p , expresiile

$$u_f \xi_{a_1 \dots a_p} - u_{a_1} \xi_f \dots a_p - \dots - u_{a_p} \xi_{a_1 \dots f}$$

sînt componentele unui tensor còvariant de ordinul $p+1$, strîmb simetric în orice pereche de indici. Dacă vectorul u_a este operatorul (23), aceste expresii nu mai constituie componentele unui tensor abstracție făcînd de cazul cînd condițiile (21) sînt îndeplinite. Atunci, deoarece la o transformare de congruențe (10)

$$\xi_{a_1 \dots a_p} = \bar{\xi}_{b_1 \dots b_p} c_{a_1}^{b_1} \dots c_{a_p}^{b_p},$$

și dacă ținem seama de formulele fundamentale (15'), obținem tensorul covariant de ordinul $p+1$ strîmb simetric în orice pereche de indice (avînd $\frac{p^2 + 3p + 2}{2}$ componente distincte)

$$\begin{aligned} \text{rot}_a \xi_{a_1 \dots a_p} &= \frac{\partial \xi_{a_1 \dots a_p}}{\partial s^a} - \frac{\partial \xi_{a \dots a_p}}{\partial s^{a_1}} - \dots - \frac{\partial \xi_{a_1 \dots a}}{\partial s^{a_p}} + \\ &+ \xi_f \dots a_p w_{a_1 a}^f + \dots + \xi_{a_1 \dots f} w_{a_p a}^f - \xi_{a f \dots a_p} w_{a_2 a_1}^f - \dots \\ &- \xi_a \dots f w_{a_p a_1}^f - \xi_{a_1 a f \dots a_p} w_{a_2 a_2}^f - \dots - \xi_{a_1 a \dots f} w_{a_p a_2}^f - \dots \\ &\dots - \xi_{a_1 \dots a_{p-2} a f} w_{a_p a_{p-1}}^f. \end{aligned} \quad (28)$$

Tensorul (28) se mai numește și *derivata exterioară* a unui tensor covariant de ordinul p strîmb simetric în orice indice [12, p. 168].

Se poate introduce și în calculul diferențial absolut de congruențe noțiunea de *divergență*, aplicînd-o componentelor contravariante ale tensorilor, asemănător ca în calculul diferențial absolut de coordonate. [8, p. 36—37].

Divergența unui vector v^a este scalarul

$$\text{div}_a v^a = v^a_{;a} = \frac{\partial v^a}{\partial s^a} - \gamma_{fa}^a v^f, \quad (29)$$

iar *divergența unui tensor de al doilea ordin v^{ab} este vectorul*¹

$$\text{div}_a v^{ab} = v^{ab}_{;a} = \frac{\partial v^{ab}}{\partial s^a} - \gamma_{fa}^a v^{fb} - \gamma_{fa}^b v^{af}. \quad (30)$$

¹ Avem și $\text{div}_a v^a_b = v^a_{b;a} = \frac{\partial v^{ab}}{\partial s^a} - \gamma_{fa}^a v^f_b + \gamma_{ba}^f v^a_f$ deoarece $\text{div}_a v^a_b = \varepsilon_{cb} \text{div}_a v^{ac}$

Ținând seama de (20''), rezultă

$$v^a_{,a} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\lambda v^a)}{\partial s^a} + \frac{\partial \mu^i_b}{\partial s^a} \lambda^a_i v^b; \quad (29')$$

de asemenea avem, dacă $v^{ab} = v^{ba}$,

$$v^{ab}_{,a} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\lambda v^{ab})}{\partial s^a} + \frac{\partial \mu^i_f}{\partial s^a} \lambda^a_i v^f b + \varepsilon^{bg} \varepsilon_{cf} w^c_{ga} v^a f \quad (30')$$

și

$$v^a_{,ba} = \varepsilon_{cb} v^{ac}_{,a} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\lambda v^a_{,a})}{\partial s^a} + \frac{\partial \mu^i_f}{\partial s^a} \lambda^a_i v^f_b + w^f_{ba} v^a_f. \quad (30'')$$

sau, dacă $v^{ab} = -v^{ba}$,

$$v^{ab}_{,a} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\lambda v^{ab})}{\partial s^a} + \frac{\partial \mu^i_f}{\partial s^a} \lambda^a_i v^f b + \frac{1}{2} w^b_{af} v^a f. \quad (30''')$$

Dacă $t^{aa_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}$ este un tensor de $p+1$ ori contravariant și de q ori covariant, divergența lui este tensorul de p ori contravariant și de q ori covariant

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_a t^{aa_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} &= t^{aa_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}, \quad a = \frac{\partial t^{aa_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}}{\partial s^a} - \gamma^a_{fa} t^{fa_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} - \\ &- \gamma^a_{fa} t^{aa_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} + \gamma^f_{b_1 a} t^{aa_1 \dots a_p}_{f \dots b_q} + \dots + \gamma^f_{b_q a} t^{aa_1 \dots a_p}_{b_1 \dots f}. \end{aligned} \quad (31)$$

6. *Tensorul de curbură.* Odată cunoscută conexiunea spațiului V_n componentele γ^a_{bcd} (pe congruențele pseudo-ortogonale (λ) din V_n) ale tensorului de curbură al spațiului sînt [4, p. 207].

$$\gamma^a_{bcd} = \frac{\partial \gamma^a_{bc}}{\partial s^d} - \frac{\partial \gamma^a_{bd}}{\partial s^c} + \gamma^a_{fc} \gamma^f_{bd} - \gamma^a_{fd} \gamma^f_{bc} + \gamma^a_{bf} w^f_{cd} \quad (32)$$

și pot fi numite *pseudo-coeficienții lui Ricci cu patru indici*. Acești coeficienți sînt strîmb simetrici în indicii c și d ; adică

$$\gamma^a_{bcd} + \gamma^a_{bdc} = 0. \quad (32')$$

De asemenea, ei satisfac și condițiile

$$\varepsilon_{af} \gamma^f_{bcd} + \varepsilon_{bf} \gamma^f_{acd} = 0, \quad (32'')$$

dacă ținem seama de relațiile (19); adică

$$\gamma^{\alpha}_{fcd} + \gamma^{\beta}_{acd} = 0, \quad \gamma^{\alpha}_{acd} - \gamma^{\gamma}_{acd} = 0, \quad \gamma^{\gamma}_{acd} + \gamma^{\tau}_{acd} = 0, \quad (32''')$$

ceea ce arată că *pseudo-coeficienții lui Ricci cu patru indici sînt strîmb simetrici în indicii a, b dacă aceștia variază simultan de la 1 la p sau de la*

$p + 1$ la n și sînt simetrice dacă unul variază de la 1 la p iar celălalt de la $p + 1$ la n .

Ținînd seama de (16'''), rezultă identitățile

$$\gamma_{bcd}^a + \gamma_{cdb}^a + \gamma_{dbc}^a = 0, \quad (32IV)$$

Ținînd seama că

$$\gamma_{abcd} = \varepsilon_{af} \gamma_{bcd}^f, \quad \gamma_{bcd}^a = \varepsilon^{af} \gamma_{fbc}, \quad (33)$$

condițiile (32'') se scriu

$$\gamma_{ab\ cd} + \gamma_{ba\ cd} = 0. \quad (33')$$

ceea ce arată că γ_{abcd} sînt strîmb simetrice nu numai în indicii c, d ci și în indicii a, b ; de asemenea, nu se schimbă dacă permutăm perechile a, b și c, d , adică

$$\gamma_{ab\ cd} - \gamma_{cd\ ab} = 0 \quad (33'')$$

În ce privește tensorii contractați de curbura, ei au componentele

$$\gamma_{bd} = \gamma_{bad}^a = \frac{\partial \gamma_{ba}^a}{\partial s^d} - \frac{\partial \gamma_{bd}^a}{\partial s^a} + \gamma_{fa}^a \gamma_{bd}^f - \gamma_{fa}^a \gamma_{ba}^f + \gamma_{bf}^a w_{ad}^f = \gamma_{bd} \quad (34)$$

$$\gamma_{acd}^a = 0. \quad (34')$$

Scalarul de curbura este

$$\gamma = \varepsilon^{ab} \gamma_{ab} \quad (35)$$

7. Trecerea de la componentele unui obiect în sistemul de congruențe la componentele lui în sistemul de coordonate. Dacă (11) sînt componentele unui tensor pe congruențe (λ) din V_n , atunci [4, p. 48]

$$T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = t_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_p} \mu_{a_1}^{i_1} \dots \mu_{a_p}^{i_p} \lambda_{j_1}^{b_1} \dots \lambda_{j_p}^{b_p} \quad (36)$$

sînt componentele tensorului în sistemul de coordonate (x) din V_n și reciproc

$$t_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_p} = T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \lambda_{i_1}^{a_1} \dots \lambda_{i_p}^{a_p} \mu_{b_1}^{j_1} \dots \mu_{b_p}^{j_p} \quad (36')$$

Mărimile (11) sînt numite [10, p. 110] și componentele invariante ale tensorului

$$T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \quad (37)$$

Deoarece $\lambda_i^a (\mu_a^i)$ constituie n ($i = 1, 2, \dots, n$) vectori covarianți (contravarianți) în raport cu transformările de coordonate și n ($a = 1, 2, \dots, n$) vectori contravarianți (covarianți) în raport cu transformările de congruență, se zice că este un *tensor mixt* [4, p. 55] sau un *tensor covariant-invariant* (contravariant-invariant) [10, p. 113] (anume tensorul metric al lui Lamé, [10, p. 111]). Tensorii micști λ_i^a și μ_a^i , după cum rezultă din

formulele (36) și (36') servesc pentru a trece de la componentele unui tensor în sistemul de congruențe (λ) la componentele tensorului în sistemul de coordonate (x) și invers.

Ținând seama de formulele (9) și (15) în (20'), obținem

$$\gamma_{bc}^a = \left(\frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k \lambda_k^a \right) \mu_b^i \mu_c^j \quad (38)$$

unde [4, p. 265]

$$\Gamma_{jk}^i = - \left| \frac{i}{jk} \right| \quad (39)$$

este conexiunea lui Levi-Civita a spațiului Riemann V_n cu metrică indefinită în sistemul de coordonate (x), iar

$$|ij| = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad \left| \frac{k}{ij} \right| = a_{kl} |ij| \quad (39')$$

sînt simbolii lui Christoffel de prima și de a doua spață ai metricii (1). Deci, formulele (38) reprezintă relația care există între componentele Γ_{jk}^i ale conexiunii lui Levi-Civita a spațiului riemannian V_n cu metrică indefinită, în sistemul de coordonate (x) și componentele γ_{bc}^a ale aceleiași conexiuni în sistemul de congruențe pseudo-ortogonale (λ) în V_n . Rezolvînd formulele (38), găsim

$$\Gamma_{jk}^i = \left(\frac{\partial \mu_a^i}{\partial s^b} + \gamma_{ab}^c \mu_c^i \right) \lambda_j^a \lambda_k^b. \quad (38')$$

Se poate arăta că relațiile (19) reprezintă *identitățile lui Ricci* pe congruențele pseudo-ortogonale (λ) în V_n cu metrică indefinită. În adevăr, scriind aceste relații în sistemul de coordonate (x)

$$(\varepsilon_{ab} \gamma_{ac}^d + \varepsilon_{ad} \gamma_{bc}^d) \lambda_i^a \lambda_j^b \lambda_k^c = 0$$

și ținînd seama de formulele (9) și (39'), se obține

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = a_{lj} \left| \frac{1}{ik} \right| + a_{il} \left| \frac{1}{jk} \right|,$$

formule ce se numesc *identitățile lui Ricci* [4, p. 266].

Este ușor de arătat că [12, p. 168]

$$\Delta_k \xi_{i_1 \dots i_p} = \lambda_{i_1}^{a_1} \dots \lambda_{i_p}^{a_p} \lambda_k^a \text{rot}_a \xi_{a_1 \dots a_p} \quad (40)$$

unde

$$\Delta_k \xi_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial \xi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_{r \dots i_p}}{\partial x^{i_1}} - \dots - \frac{\partial \xi_{i_1 \dots k}}{\partial x^{i_p}} \quad (41)$$

este *derivata exterioară* — în sistemul de coordonate (x) din V_n — a tensorului covariant strîmb simetric în orice pereche de indice

$$\xi_{i_1 \dots i_p} = \xi_{a_1 \dots a_p} \lambda_{i_1}^{a_1} \dots \lambda_{i_p}^{a_p}.$$

În particular, rezultă că [8, p. 35]

$$\operatorname{rot}_k V_i = \lambda_i^a \lambda_k^b \operatorname{rot}_b v_a = \frac{\partial V_i}{\partial x^k} - \frac{\partial V_k}{\partial x^i}, \quad (40')$$

$$\operatorname{rot}_k V_{ij} = \lambda_i^a \lambda_j^b \lambda_k^c \operatorname{rot}_c v_{ab} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial V_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial V_{ki}}{\partial x^j}, \quad (40'')$$

unde

$$V_i = \lambda_i^a v_a, \quad V_{ij} = \lambda_i^a \lambda_j^b v_{ab}.$$

De asemenea, găsim

$$\operatorname{div}_k V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \mu_{a_1}^{i_1} \dots \mu_{a_p}^{i_p} \lambda_{j_1}^{b_1} \dots \lambda_{j_q}^{b_q} \operatorname{div}_a v_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}, \quad (42)$$

unde

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_k V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} &= \frac{\partial V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^h V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \Gamma_{lk}^i V_{j_1 \dots j_q}^{kl \dots i_p} - \\ &- \dots - \Gamma_{lk}^{i_p} V_{j_1 \dots j_q}^{ki_1 \dots l} + \Gamma_{j_1 k}^l V_{l \dots j_q}^{ki_1 \dots i_p} + \dots + \Gamma_{j_q k}^l V_{j_1 \dots l}^{ki_1 \dots i_p} \end{aligned} \quad (43)$$

este *divergența* tensorului

$$V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \mu_a^{i_1} \dots \mu_{a_p}^{i_p} \lambda_{j_1}^{b_1} \dots \lambda_{j_q}^{b_q} v_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}.$$

În particular, avem [8, p. 37]

$$\operatorname{div}_k V^k = \operatorname{div}_a v^a = \frac{\partial V^k}{\partial x^k} - \Gamma_{lk}^k V^l = V^k_{,k}, \quad (42')$$

$$\operatorname{div}_k V^{ki} = \lambda_b^i \operatorname{div}_a v^{ab} = \frac{\partial V^{ki}}{\partial x^k} - \Gamma_{lk}^k V^{li} - \Gamma_{lk}^i V^{kl} = V^{ki}_{,k}. \quad (42'')$$

Deoarece

$$\Gamma_{ik}^k = - \left| \begin{smallmatrix} k \\ ik \end{smallmatrix} \right| = - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}} \frac{\partial \sqrt{\varepsilon a}}{\partial x^i}$$

$$(\varepsilon a = \lambda^2, a = |a_{ij}|, \varepsilon = \text{semn } a),$$

și ținînd seama de (2'), (9), (15), rezultă

$$\operatorname{div}_k V^k = \operatorname{div}_a v^a = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}} \frac{\partial (\sqrt{\varepsilon a} V^k)}{\partial x^k}. \quad (43')$$

De asemenea avem, dacă tensorul v_{ab} este simetric

$$V^k_{,i,k} = v^a_{b,a} \lambda_i^b \lambda^b_i = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}} \frac{\partial (\sqrt{\varepsilon a} V^k_i)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} V^{jk},$$

deoarece

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = a_{jl} \mu_a^l \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^k} + a_{il} \mu_a^l \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^k}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} V^{ij} = \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^k} \mu_a^i V_j^i,$$

sau, dacă tensorul v_{ab} este antisimetric,

$$\operatorname{div}_k V^{ki} = v^{ab}{}_{,a} \mu_b^i = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a}} \frac{\partial (\sqrt{\varepsilon_a} V^{ki})}{\partial x^k}. \quad (43''')$$

Dacă R_{jkl}^i sînt componentele, în sistemul de coordonate (x) , ale tensorului de curbură al spațiului V_n [4, p. 278]

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \left| \begin{smallmatrix} i \\ j l \end{smallmatrix} \right|}{\partial x^k} - \frac{\partial \left| \begin{smallmatrix} i \\ j k \end{smallmatrix} \right|}{\partial x^l} + \left| \begin{smallmatrix} i \\ r k \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} r \\ j l \end{smallmatrix} \right| - \left| \begin{smallmatrix} i \\ r l \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} r \\ j k \end{smallmatrix} \right|, \quad (44)$$

care se obține ținînd seama de (39) în tensorul de curbură Γ_{jkl}^i al spațiului cu conexiune afină Γ_{jk}^i

$$\Gamma_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \Gamma_{rl}^i \Gamma_{jk}^r, \quad (44')$$

rezultă

$$\gamma_{bcd}^a = R_{jkl}^i \lambda_i^a \mu_b^j \mu_c^k \mu_d^l, \quad \gamma_{abcd} = R_{ijkl} \mu_a^i \mu_b^j \mu_c^k \mu_d^l. \quad (44'')$$

Atunci, condițiile (33'') rezultă imediat, dacă ținem seama de (44'). În adevăr, deoarece $R_{ijkl} = R_{klij}$ avem

$$\gamma_{abcd} - \gamma_{cdab} = (R_{ijkl} - R_{klij}) \mu_a^i \mu_b^j \mu_c^k \mu_d^l = 0.$$

8. *Izometriile unui spațiu V_n .* Să considerăm acum o transformare infinitesimală de variabile

$$x'^i = x^i + \xi^i \quad (45)$$

unde ξ^i — funcții de $x^1, \dots, x^n$ — sînt cantități de primul ordin. Se știe că vectorul ξ^i definește un grup G_1 continuu cu un parametru, a cărui transformare infinitesimală este (45).

Transformarea infinitesimală a congruențelor pseudo-ortogonale (λ) este dată de formulele

$$c_b^a = \delta_b^a + \xi_b^a \quad (46)$$

unde ξ_b^a — funcții de variabilele $x^1, \dots, x^n$ — sînt cantități de primul ordin.

Sînt de considerat două cazuri, după cum transformările (45) și (46) sînt sau nu independente.

În primul caz, transformările (45) și (46) sînt legate de caracterul de dualitate ce există între calculul diferențial absolut de coordonate și cal-

culul diferențial absolut de congruențe. În adevăr, componentele unui tensor în sistemul de variabile rămân invariante printr-o transformare de congruențe și, invers, componentele unui tensor într-un sistem de congruențe sînt invariante la transformările de variabile.

Rezultă că, variația unui tensor (37) generată de o transformare infinitezimală a grupului (45) este

$$LT_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^l} \xi^l - T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^1} - \dots + T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \quad (47)$$

și se numește *derivata lui Lie* a tensorului în raport cu vectorul ξ^i [12, p. 168], [10, p. 124]. În adevăr, obținem că grupul termenilor de primul ordin în ξ^i este (47), dacă în legea de transformare a tensorului (37), față de o transformare de variabile,

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \dots \frac{\partial x'^{j_q}}{\partial x^{l_q}} = T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_p}}{\partial x^{k_p}}$$

punem

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \frac{\partial T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^r} \xi^r + \dots, \quad \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \delta_j^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}.$$

Derivata lui Lie a tensorului (37) este nulă dacă tensorul admite grupul de mișcare G_1 sau, cum se mai spune, dacă tensorul este invariant prin grupul G_1 sau încă, prin mișcarea (45).

După I. B. Rumer [10, p. 125] variația unui tensor (11) generată de o transformare infinitezimală a grupului (46) este

$$\Delta t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} = t_{b_1 \dots b_q}^{r \dots a_p} \xi_r^{a_1} + \dots - t_{b_1 \dots r}^{a_1 \dots a_p} \xi_{b_q}^r, \quad (48)$$

adică grupul termenilor de primul ordin în ξ_b^a din legea de transformare a tensorului

$$t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} = t_{a_1 \dots a_p}^{c_1 \dots c_p} c_{c_1}^{a_1} \dots c_{c_p}^{a_p} \bar{c}_{b_1}^{c_1} \dots \bar{c}_{b_q}^{c_q}$$

în care ținem seama de (46) și că, în aproximarea termenilor liniari în cantitățile de primul ordin,

$$\bar{c}_b^a = \delta_b^a - \xi_b^a, \quad (46')$$

unde $\bar{c}_b^a$ sînt reciproci determinantului $|c_b^a|$, ($c_c^a \bar{c}_b^c = \delta_b^a$).

În al doilea caz, care de altfel intervine în problema echivalenței în raport cu grupul pseudo-ortogonal ([4], cap. III, § 1), o transformare de variabile din grupul (45) induce o transformare (46) a congruențelor pseudo-ortogonale (λ) și reciproc. Atunci, necunoscutele $\xi^a = \lambda_i^a \mu^i$ sînt principale iar ξ_b^a sînt necunoscutele auxiliare.

Rezultă că variația unui tensor (11) generată de o transformare infinitesimală (45), (46) este

$$\delta t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} = \frac{\partial t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}}{\partial s^c} \xi^c - t_{b_1 \dots b_q}^{c \dots a_p} \xi_c^{a_1} - \dots + t_{b_1 \dots c}^{a_1 \dots a_p} \xi_{b_q}^c \quad (49)$$

și se obține ca grupul tensorilor de primul ordin în necunoscutele ξ^a , ξ_b^a din legea de transformare (12) a tensorului (11), în care ținem seama de (45), (46) și că

$$t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} + \frac{\partial t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}}{\partial s^c} \xi^c + \dots,$$

deci că $t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}$ sînt aceleași funcții de x^i ca și $t_{b_i \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}$ de x^i .

Deoarece necunoscutele principale ale transformării infinitesimale sînt ξ^a , în probleme de echivalențe putem exprima pe ξ_b^a în funcție de ξ^a . În adevăr, în spațiul V_n , avem sistemele de congruențe pseudo-ortogonale

$$ds'^a = \lambda_i^a(x') dx'^i, \quad ds^a = \lambda_i^a(x) dx^i.$$

Însă, prin orice transformare de coordonate, ds'^a devine forme cu diferențiale totale în dx^i [4, p. 51], încît avem

$$ds'^a = c_b^a ds^b$$

adică

$$\lambda_i^a dx'^i = c_b^a \lambda_i^b dx^i,$$

sau încă

$$\lambda_j^a \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = c_b^a \lambda_i^b.$$

Rezolvînd în raport cu c_b^a , găsim

$$c_b^a = \lambda_j^a \mu_b^i \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}. \quad (50)$$

Ținînd seama de (45) și (46), obținem

$$\delta c_b^a + \xi_b^a = \left(\lambda_j^a + \frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^i} \xi^i + \dots \right) \mu_b^i \left(\delta x^j + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \xi^i \right)$$

sau, cu aproximația termenilor liniari în cantitățile de primul ordin,

$$\xi_b^a = \left(\frac{\partial \lambda_j^a}{\partial x^i} \xi^j + \lambda_j^a \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right) \mu_b^i = \mu_b^i L_i^a \xi^i \quad (51)$$

Ținând seama de (2') și de (15), găsim

$$\xi_b^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial s^b} + \left(\frac{\partial \mu_c^i}{\partial s^b} - \frac{\partial \mu_b^i}{\partial s^c} \right) \lambda_i^a \xi^c = \frac{\partial \xi^a}{\partial s^b} + w_{bc}^a \xi^c. \quad (51')$$

Observăm că dacă cantitățile ξ_b^a din (49) sînt date de (51), avem [12, p. 169]

$$LT_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \left(\mu_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \right) \mu_{a_1}^{i_1} \dots \lambda_{j_q}^{b_q} \quad (52)$$

și reciproc, adică formulele (49) reprezintă derivata lui Lie (în raport cu vectorul ξ^a) pe congruențele (λ) .

O transformare infinitezimală (45), (46) este o *izometrie* a spațiului V_n dacă conservă metrica spațiului; cu alte cuvinte, ea conservă condițiile de pseudo-ortogonalitate (10'). Deci, transformarea infinitezimală este o izometrie, dacă

$$1\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{fb} \xi_a^f + \varepsilon_{af} \xi_b^f = 0. \quad (53)$$

și reprezintă ecuațiile lui Killing*.

Deoarece $\xi_{ab} = \varepsilon_{af} \xi_b^f$, rezultă că

$$\xi_{ab} + \xi_{ba} = 0, \quad (53')$$

ceea ce arată că mărimile ξ_{ab} sînt strîmb simetrice în indicii a, b. Ținând seama de (51'), (20') și (17) în (53), rezultă

$$\frac{\partial \xi_a}{\partial s^b} + \frac{\partial \xi_b}{\partial s^a} + (\gamma_{ab}^f + \gamma_{ba}^f) \xi_f = 0,$$

ceea ce permite să scriem ecuațiile lui Killing sub forma

$$\xi_{a,b} + \xi_{b,a} = 0 \quad (53'')$$

unde

$$\xi_{a,b} = \frac{\partial \xi_a}{\partial s^b} + \gamma_{ab}^f \xi_f$$

sînt derivatele covariante, pe congruențele pseudo-ortogonale (λ) în V_n , ale vectorului ξ_a .

Din teoria echivalenței a două sisteme de congruențe (λ) și (λ') [în general din spațiile $V_n(x^1, \dots, x^n)$ și $V_n'(x'^1, \dots, x'^n)$] în raport cu trans-

* În sistemul de coordonate (x) , dacă ținem seama de (52), ecuațiile lui Killing sînt [4, p. 291]

$$La_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \xi^k + a_{ij} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + a_{ji} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0.$$

formările unui subgrup Γ , al grupului liniar general (10), pe care E. Cartan o numește *problema generală de echivalență*, rezultă că sistemul de echivalență este constituit de ecuațiile [4, p. 106]

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = c_b^a \lambda_j^b \mu_a^i, \\ \text{b)} \quad & \frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} - \frac{\partial c_c^a}{\partial s^b} = w_{ef}^a c_b^e c_c^f - w_{bc}^f c_f^a, \\ \text{c)} \quad & F^\alpha(c^a, x^i, x^i) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Ecuațiile (54 a) se obțin rezolvînd formulele (50) în raport cu $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$, ecuațiile (54 b) sînt condițiile de integrabilitate ale sistemului (54 a), iar ecuațiile (54 c) sînt condițiile în termeni finiți pe care trebuie să le satisfacă c_b^a dacă aparține unui grup Γ .

În cazul *echivalenței în raport cu grupul pseudo-ortogonal*, adică grupul Γ , este grupul pseudo-ortogonal iar condițiile (54 c) sînt date de condițiile (10'), sistemul (54) devine un sistem cu diferențiale totale. În adevăr, ținînd seama de condițiile de pseudo-ortogonalitate (10'), formulele fundamentale (54 b) pot fi rezolvate în raport cu derivatele $\frac{\partial c_b^a}{\partial s^c}$; obținem astfel legea de transformare a conexiunii afine a spațiului V_n :

$$\frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} = \gamma_{fg}^a c_b^f c_c^g - \gamma_{bc}^f c_f^a \quad (54')$$

unde γ_{bc}^a , $\gamma_{bc}^{'a}$ sînt pseudo-coeficienții de rotație ai lui Ricci pentru congruențele (λ) , (λ') .

Atunci relațiile obținute prin derivare din (10') sînt identic nule, din cauza lui (54'). Condițiile de integrabilitate ale lui (54') sînt satisfăcute dacă

$$\gamma_{efg}^{'a} c_b^e c_c^f c_d^g = \gamma_{bcd}^f c_f^a \quad (54'')$$

unde $\gamma_{bcd}^{'a}$, $\gamma_{bcd}^{'a}$ sînt pseudo-coeficienții lui Ricci cu patru indici ai congruențelor (λ) , (λ') . Ecuația (54'') exprimă echivalența tensorilor de curbura.

Dacă pseudo-coeficienții $\gamma_{bcd}^{'a}$ nu sînt nuli, derivînd o dată sau de mai multe ori formulele (54'') în raport cu arcul s^a și ținînd seama de (54'), obținem alte relații în termeni finiți (ce sînt de gradul al treilea în c_b^a sau de grad superior), care exprimă echivalența tensorilor derivați ai tensorilor de curbura [4, p. 111).

Dacă transformările (45), (46) sînt izometрии ale spațiului V_n , ecuațiile (54'), (54''), ... se scriu

$$1\gamma_{bc}^a = 0, \quad 1\gamma_{bcd}^a = 0, \dots \quad (54''')$$

unde

$$l\gamma_{bc}^a = \frac{\partial \xi_b^a}{\partial s^c} - \frac{\partial \gamma_{bc}^a}{\partial s^f} \xi_f^f + \gamma_{bc}^f \xi_f^a - \gamma_{fc}^a \xi_b^f - \gamma_{bf}^a \xi_c^f \quad (55)$$

este derivata lui Lie a conexiunii γ_{bc}^a în raport cu transformările infinitesimale (45), (46).

Rezultă că problema determinării izometriilor spațiului V_n cu metrică indefinită (8) revine la determinarea soluțiilor sistemului (53''), (54''') în necunoscutele ξ_a și ξ_b^a . Se observă că ecuațiile (54'''), începînd de la a doua, sînt ecuații algebrice (liniare) în ξ_a , ξ_b^a .

9. *Probleme variaționale.* Să considerăm integrala

$$J = \int \lambda \gamma^\alpha d\Omega, \quad (56)$$

($\lambda = |\lambda_i^a|$, $\alpha = \text{const.}$, γ — scalarul de curbura al spațiului V_n dat de formula (35), $d\Omega = dx^1, \dots, dx^n$), care rămîne invariantă față de transformările grupurilor (45) și (46).

Variația acestei integrale este

$$\delta J = \int \gamma^{\alpha-1} (\gamma \delta \lambda + \alpha \lambda \delta \gamma) d\Omega.$$

Însă

$$\delta \lambda = \lambda \mu_a^i \delta \lambda_i^a = - \lambda \lambda_i^a \delta \mu_a^i,$$

$$\delta \gamma = \varepsilon^{ab} \gamma_{ab} = \varepsilon^{ab} (\mu_a^i \mu_b^j \Gamma_{ij}) = 2\gamma_b^a \lambda_i^b \delta \mu_a^i + a^{ij} \delta \Gamma_{ij},$$

încît găsim

$$\delta J = 2\alpha \int \lambda \gamma^{\alpha-1} \left(\gamma_b^a - \frac{1}{2\alpha} \delta_b^a \gamma \right) \lambda_i^b \delta \mu_a^i d\Omega + \alpha \int \lambda \gamma^{\alpha-1} a^{ij} \delta \Gamma_{ij} d\Omega.$$

Ultima integrală se anulează, dacă vom folosi artificul cunoscut¹ (v. [10 p. 128], [13, p. 81]). Deci obținem

$$\delta J = 2\alpha \int \lambda \sigma_b^a \lambda_i^b \delta \mu_a^i d\Omega, \quad (56')$$

unde

$$\sigma_{ab} = \gamma^{\alpha-i} e_{ab}^i, \quad (\sigma_b^a = \varepsilon^{ac} \sigma_{cb}, \sigma^{ab} = \varepsilon^{af} \varepsilon^{bg} \sigma_{fg}), \quad (57)$$

iar

$$e_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2\gamma} \varepsilon_{ab} \gamma = e_{ba}, \quad (58)$$

dacă ținem seama de (34).

¹ Ultima integrală, fiind integrala unei divergențe dintr-o densitate vectorială, poate fi transformată într-o integrală de suprafață, și astfel dispăre.

Dacă variația este generată de o transformare a grupului (46), conform formulei (48), avem

$$\delta\mu_a^i = \Delta\mu_a^i = -\mu_c^i \xi_a^c \quad (59)$$

Deoarece față de transformările grupului (46), integrala (56) este invariantă, trebuie ca

$$\delta J = -2\alpha \int \lambda \sigma_b^a \xi_a^b d\Omega = 0. \quad (56'')$$

Dacă $\|\xi_{ab}\|$ este o matrice antisimetrică arbitrară¹; deci ξ_b^a satisfac condițiile (53), atunci (56''), deoarece $\sigma_b^a \xi_a^b = \frac{1}{2}(\sigma^{ab} - \sigma^{ba}) \xi_{ab}$, conduce la rezultatul că tensorul σ_{ab} este simetric².

$$\sigma_{ab} = \sigma_{ba}. \quad (57')$$

În cazul general, cînd mărimile ξ_b^a sînt arbitrare obținem

$$\sigma_{ab} = 0. \quad (57'')$$

Dacă variația este generată de o transformare a grupului (45), după formula (47), rezultă

$$\delta\mu_a^i = L\mu_a^i = \frac{\partial\mu_a^i}{\partial x^l} \xi^l - \mu_a^l \frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}. \quad (59')$$

Deoarece integrala (56) este invariantă față de grupul G_1 , a cărei transformare infinitesimală este dată de formula (45), trebuie ca

$$\delta J = 2\alpha \int \lambda \sigma_b^a \lambda_j^b L\mu_a^i d\Omega = 0. \quad (56''')$$

Deci, obținem

$$\begin{aligned} \int \lambda \sigma_c^a \lambda_j^c \left(\frac{\partial\mu_a^j}{\partial x^i} \xi^i - \mu_a^i \frac{\partial\xi^j}{\partial x^i} \right) d\Omega &= - \int \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\lambda \sigma_c^a \mu_a^i \xi^c \right) d\Omega + \\ + \int \lambda \left[\frac{1}{\lambda} \mu_b^l \lambda_j^l \frac{\partial}{\partial s^j} \left(\lambda \sigma_c^a \mu_a^i \lambda_j^c \right) + \sigma_c^a \lambda_j^c \frac{\partial\mu_a^i}{\partial s^b} \right] \xi^b d\Omega &= \int \lambda \sigma_{b,a}^a \xi^b d\Omega = 0, \end{aligned}$$

deoarece integrala dintr-o divergență dispăre, iar

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \mu_b^l \lambda_j^l \frac{\partial}{\partial s^j} \left(\lambda \sigma_c^a \mu_a^i \lambda_j^c \right) + \sigma_c^a \lambda_j^c \frac{\partial\mu_a^i}{\partial s^b} &= \\ = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\lambda \sigma_b^a)}{\partial s^a} + \sigma_b^a \frac{\partial\mu_a^i}{\partial s^j} \lambda_j^l + \sigma_c^a \mu_b^j \frac{\partial\lambda_j^c}{\partial s^a} + \sigma_c^a \lambda_j^c \frac{\partial\mu_a^j}{\partial s^b} &= \\ = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\lambda \sigma_b^a)}{\partial s^a} + \sigma_b^a \frac{\partial\mu_a^i}{\partial s^j} \lambda_j^l + \sigma_c^a \left(\frac{\partial\mu_a^j}{\partial s^b} - \frac{\partial\mu_b^j}{\partial s^a} \right) \lambda_j^c &= \\ = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\lambda \sigma_b^a)}{\partial s^a} + \sigma_b^a \frac{\partial\mu_a^i}{\partial s^c} \lambda_j^c + \sigma_c^a w_{ba}^c = \sigma_{b,a}^a, \end{aligned}$$

¹ Presupunem că mărimile ξ_b^a satisfac condițiile lemei calculului variațiilor.

² Ceea ce are loc, dacă ținem seama de (34).

dacă ținem seama de (2'), (15), (30'') și (57'). De unde, datorită caracterului arbitrar al vectorului ξ^a , rezultă

$$\operatorname{div}_a \sigma_b^a = 0. \quad (57''')$$

În aplicații (teoria relativității și teoriile unitare), prezintă interes considerarea integralei Lagrange invariante față de transformările grupurilor (45) și (46) ([10], § 38—39)

$$J = \int \lambda L \left(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial x^i} \middle| \mu_a^i, \frac{\partial \mu_a^i}{\partial x^j} \right) d\Omega, \quad (60)$$

care permite să obținem toate formulele fundamentale ale teoriei câmpului tensorial ω (sau spinorial complex $\omega, \bar{\omega}$).

Variind în raport cu componentele câmpului ω , când μ_a^i sînt constanți, obținem ecuațiile câmpului în forma general covariantă:

$$\frac{\partial(\lambda L)}{\partial \omega} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\partial(\lambda L)}{\partial \left(\frac{\partial \omega}{\partial x^i} \right)} \right] = 0. \quad (61)$$

Variind în raport cu metrica lui Lamé μ_a^i obținem expresia tensorului „energetic” θ_{ab} . În adevăr, variația integralei (60) este

$$\delta J = \int \left\{ \frac{\partial(\lambda L)}{\partial \mu_a^i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{\partial(\lambda L)}{\partial \left(\frac{\partial \mu_a^i}{\partial x^j} \right)} \right] \right\} \delta \mu_a^i d\Omega = \int \lambda \theta_b^a \lambda_b^i \delta \mu_a^i d\Omega,$$

unde s-a notat

$$\lambda \theta_b^a = \left\{ \frac{\partial(\lambda L)}{\partial \mu_a^i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{\partial(\lambda L)}{\partial \left(\frac{\partial \mu_a^i}{\partial x^j} \right)} \right] \right\} \mu_b^i, \quad (62)$$

Dacă variația este generată de o transformare a grupului (46), deci $\delta \mu_a^i$ este dat de formula (59), rezultă

$$\delta J = \int \lambda \theta_b^a \xi_a^b d\Omega = 0$$

Dacă $\|\xi_{ab}\|$ este o matrice antisimetrică arbitrară¹, deci ξ_b^a satisfac condițiile (53), atunci din anularea variației integralei (60) rezultă simetria tensorului θ_b^a :

$$\theta_{ab} = \theta_{ba} \quad (62')$$

În cazul general, când mărimile ξ_b^a sînt arbitrare¹, obținem

$$\theta_b^a = 0 \quad (62'')$$

¹Presupunem că mărimile ξ_b^a satisfac condițiile lemei calculului variațiilor.

Dacă variația este generată de o transformare a grupului (45) deci $\delta\mu_a^i$ este dat de formula (59'), refăcînd calculul din cazul integralei (56), rezultă

$$\operatorname{div}_a \theta_b^a = 0. \quad (62''')$$

10. *Geodezicele spațiului* V_n . O curbă

$$x^i = x^i(t) \quad (63)$$

este o *geodezică* a spațiului V_n dacă arcul între două puncte $P_0(t_0)$ $P_1(t_1)$ ale curbei, suficient de apropiate, este cel mai scurt față de arcul pe orice curbă vecină

$$\bar{x}^i = x^i(t) + \delta x^i \quad (63')$$

care trece prin punctele P_0 și P_1 (deci creșterile δx^i se anulează pentru t_0 și t_1). Aceasta revine la a spune că integrala

$$J = \int_{t_0}^{t_1} ds \quad (64)$$

trece printr-un extremum. Arcul P_0P_1 este dat de formula

$$s = \int \sqrt{\varepsilon_{ab} u^a u^b} dt$$

unde

$$u^a = \lambda_t^a \frac{dx^i}{dt} = \frac{ds^a}{dt} \quad (65)$$

sînt componentele pe congruențele pseudo-ortogonale (λ) ale vectorului tangent $\frac{dx^i}{dt}$ al curbei. Deci, integrala (64) se mai scrie

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{L} dt, \quad L = \varepsilon_{ab} u^a u^b = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (64')$$

L , numindu-se *funcția lui Lagrange*. Or, dacă (63) sînt ecuațiile unei curbe geodezice, variația acestei integrale este nulă, atunci cînd trecem la curba vecină (63'); adică

$$\delta J = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \delta L dt = 0, \quad \frac{1}{2} \delta L = \varepsilon_{ab} u^a \delta u^b.$$

Deoarece

$$\delta dx^i = d\delta x^i \quad \delta u^b = \lambda_t^b \frac{d}{dt} \delta x^i + \mu_c^j u^c \frac{\partial \lambda_j^b}{\partial x^i} \delta x^i,$$

printr-o integrare prin părți, obținem

$$\varepsilon_{ab} u^a \lambda_i^b \delta x^i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon_{ab} \left[\frac{d}{dt} (u^a \lambda_i^b) - u^a u^c \mu_c^j \frac{\partial \lambda_j^b}{\partial x^i} \right] \mu_f^i \delta s^f dt = 0. \quad (64'')$$

Partea integrată fiind nulă (δx^i sînt nule în t_0 și t_1), iar δs^f arbitrară, efectuînd și calculele în paranteză, rezultă

$$\varepsilon_{af} \frac{du^a}{dt} + \varepsilon_{ab} u^a u^c \left(\frac{\partial \lambda_i^b}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_j^b}{\partial x^i} \right) \mu_f^i \mu_c^j = 0,$$

sau încă, ținînd seama de (15), (17), (19) și că $\varepsilon_{af} \gamma_{cf}^b u^a u^c = 0$,

$$\frac{du^b}{dt} = \gamma_{ac}^b u^a u^c. \quad (64''')$$

Deci, rezultă că *ecuațiile curbelor geodezice sînt*

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = \mu_a^i u^a, \\ \frac{du^a}{dt} = \gamma_{bf}^a u^b u^f, \end{cases} \quad (65)$$

și constituie un sistem diferențial de primul ordin, în $2n$ funcții necunoscute x^i și u^a , de variabila t . Ecuațiile (65) coincid cu ecuațiile *curbelor autoparalele* ale pseudo-coeficienților lui Ricci γ_{bc}^a (conexiunea afină a spațiului V_n), curbe a căror vector tangent u^a se transportă prin paralelism de-a lungul curbei. Ele admit integrala patrată

$$\varepsilon_{ab} u^a u^b = c. \quad (65')$$

Deci, rezultă

$$ds^2 = c dt^2 \quad (65'')$$

Dacă $c = 0$, curba geodezică este o curbă de lungime nulă.

În sistemul de coordonate (x) , ecuațiile (65) ale curbelor geodezice se scriu :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (65''')$$

unde conexiunea Γ_{jk}^i a lui Levi-Civita este dată de formulele (39).

11. Se pot introduce și în alt mod congruențe pseudo-ortogonale într-un spațiu V_n cu metrică indefinită. În adevăr, o dată cu L. P. Eisenhart ([5], cap. III), putem presupune că parametrii μ_a^i satisfac condițiile (4) și că momentele λ_i^a sînt determinate prin formulele

$$\lambda_i^a = a_{ij} \mu_a^j.$$

Se observă ușor că

$$\lambda_i^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha}, \lambda_i^{\nu} = -\lambda_i^{\nu} \quad (\alpha \leq p, \nu > p)$$

adică momentele λ_i^{α} ale lui Eisenhart sînt diferite momente λ_i^{α} ale lui Vrănceanu. Însă, diferite mărimi construite cu ajutorul conexiunii afine asociate congruențelor pseudo-ortogonale ale lui Eisenhart, nu sînt invariante față de o transformare de congruențe. Folosindu-se congruențele pseudo-ortogonale ale lui Vrănceanu, acest inconvenient este înlăturat.

De asemenea, se mai pot considera formele canonice ale metricii unui spațiu V_n cu metrică indefinită, în care să intre congruențele nule [14], [4, p. 262].

Buc., iunie 1961.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Ricci: „Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associées a une forme différentielle quadratique“, Bul. des Sci. Mathém., 1892.
2. G. Ricci și T. Levi-Civita: „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications“, Mathematische Annalen, vol. 54, 1901.
3. T. Levi-Civita: „Lezioni de calcolo differenziale assoluto“ Roma (A. Stok), 1925.
4. G. Vrănceanu: „Sur les espaces non holonomes“, C.R. de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 183, p. 852, 1926.
5. G. Vrănceanu: „Sur le calcul différentiel absolu des congruences“, C. R. de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 186, p. 17–95, 1928.
6. G. Vrănceanu: „Les espaces non holonomes“, Memorial des Sc. Math., fasc. 76 Gauthier Villars, 1936.
7. G. Vrănceanu: „Leçons de Géométrie différentielle“, vol. I, Ed. de l'Acad. de la République Populaire Roumaine, 1957¹.
8. L. Ph. Eisenhart: „Riemannian Geometry“, Princeton University Press, 1926.
9. G. Vrănceanu: „Sur une théorie unitaire non holonome des champs physiques“, Le journal de physique et le radium, t. VII, nr. 12, p. 514–526, 1936.
10. T. Levi-Civita: „Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen“, Sitzungberichte Akademie, Berlin, 1931.
11. Ion D. Teodorescu: „Asupra ecuațiilor electromagnetice ale cîmpului electrogravitațional în teoria unitară neolonomă“, Analele Univ. București, seria Șt. Naturii, nr. 15, 1957.
12. I. B. Rumer: JETP, t. 19, nr. 4, 1949.
13. I. B. Rumer: „Cercetări asupra 5-opticii“, Ed. Tehnică, Buc. 1958.
14. A. Попович: „Нелинейность и конформная взаимность“, DAN. SSSR, t. III, nr. 1, 1956.
15. A. Попович: „Нелинейность поля в конформной теории взаимности“, JETP, t. 32, nr. 4, 1957.
16. A. Попович: „Teoria conformă relativist-generală a cîmpurilor tensoriale și spinoriale“, Comunicările Acad. R.P.R. t. VII, nr. 9, 1958.
17. A. Попович: „Théorie conforme dans C_6 de la particule de spin maximum 2“, C. R. de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 248, nr. 4, p. 528, 1959.
18. G. Vrănceanu: „Tenseurs harmoniques et groupes de mouvement d'un espaces de Riemann“, Comentarii Mathematicii Helveticii, vol. 33, fasc. 3, 1959.
19. A. Попович: „Deducerea variațională a ecuațiilor gravifice și electromagnetice conform-covariante de al II-lea ordin“, Bul. științific, secț. de șt. mat. și fiz. t. VI, nr. 1, 1954.
20. Yung-chow Wong: „Quasiortogonal enuple of congruences in a Riemann space“, Annals of Mathematics, vol. 46, p. 518, 1945.

¹ Prima ediție a acestui volum a apărut în 1947.

МЕТОД ПСЕВДО-ОРТОГОНАЛЬНЫХ КОНГРУЕНЦИЙ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, I

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Работа имеет характер обзора и содержит некоторые известные результаты о применении метода псевдо-ортогональных конгруенций в теории относительности и в некоторых унитарных теориях.

В настоящей статье представляющей собою первую часть работы излагаются результаты о римановых пространствах V_n с индефинитной метрикой при помощи метода псевдо-ортогональных конгруенций, развитого Г. Врэнчану, позволяющего изучать разные свойства этих пространств без привлечения мнимых величин. Рассматриваются такие задачи, как: псевдо-ортогональные конгруенции в V_n , аффинная связность пространства, тензорный анализ, изометрии пространства, вариационные задачи, и т. д.

MÉTHODE DE CONGRUENCES PSEUDO-ORTHOGONALES DANS LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ, I

R É S U M É

L'article a un caractère de synthèse. On expose un certain nombre de résultats connus relatives à l'utilisation de la méthode de congruences pseudo-orthogonales dans la théorie de la relativité et dans quelques théories unitaires.

La première partie, qui fait le sujet de cet article, contient quelques résultats relatifs aux espaces de Riemann V_n à métrique indéfinie, utilisant la méthode de congruences, pseudo-orthogonales développée par G. Vrănceanu, méthode qui permet l'étude de différentes propriétés de ces espaces sans employer des quantités imaginaires. On traite des problèmes comme: les congruences pseudo-orthogonales dans V_n , sa connexion affine, l'analyse tensorielle, les isométries de l'espace, des problèmes variationnelles, etc.

ASUPRA GEODEZICELOR SPAȚIILOR V_{2p} PROIECTIV-COMPLEXE CU CURBURĂ NEGATIVĂ

D. S M A R A N D A

Considerînd spațiile proiectiv-complexe V_{2p} cu curbura negativă, acad. G. Vrăncianu stabilește [1] că metrica acestora este dată de formula

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + [dx^2 - m(x^{2h-1}dx^{2h} - x^{2h}dx^{2h-1})]^2}{4m^2(x^1)^2} + \frac{(dx^k)^2}{2mx^1}, \quad (1)$$

unde $h = 2, \dots, p$, $k = 3, \dots, 2p$, $m > 0$ și $x^1 > 0$, iar geodezicele acestor spații sînt:

a) porțiuni de cerc cu centrul de partea în care $x^1 < 0$, avînd ecuațiile

$$\begin{aligned} x^1 &= A^1 \cos u - A^2 \sin u - mM, \quad 4m^2c^2[(A^1)^2 + (A^2)^2 - m^2M^2] = 1 \\ x^2 &= A^1 \sin u + A^2 \cos u + m[c^{2h-1}A^{2h} - c^{2h}A^{2h-1}] \cos u + \\ &\quad + m[c^{2h-1}A^{2h-1} + c^{2h}A^{2h}] \sin u + C^2 \quad (2) \\ x^{2h-1} &= A^{2h-1} \cos u - A^{2h} \sin u + c^{2h-1} \\ x^{2h} &= A^{2h} \cos u + A^{2h-1} \sin u + c^{2h}, \end{aligned}$$

unde A^i, c^i sînt constante de integrare, $M = \sum_{i=3}^{2p} (A^i)^2$ iar u este legat de s prin relația

$$du = 4m^2cds, \text{ cu } c \neq 0; \quad (3)$$

b) semidrepte paralele cu axa Ox^1 , sau

c) porțiuni de parabole,
după cum α este zero sau nu în ecuațiile

$$\begin{aligned}
 x^1 &= -\frac{m\alpha}{2} u^2 + pu + q, \quad p^2 + 2m\alpha q = 1, \quad \alpha = \sum_{i=3}^{2p} (\alpha^i)^2 \\
 x^2 &= m(\alpha^{2h}\beta^{2h-1} - \alpha^{2h-1}\beta^{2h})u + c^2 \\
 x^i &= \alpha^i u + \beta^i \quad (i = 3, \dots, 2p)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

unde α^i , β^i , p , q , c^2 sînt constante de integrare iar u este legat de s prin relația

$$du = 2mx^1 ds \tag{5}$$

A. — Formulele finite pentru lungimea arcului pe fiecare tip de geodezică a spațiului (1) sînt:

a) în cazul porțiunilor de cerc, folosind relația (3) și din sistemul (2) prima ecuație,

$$s = \frac{1}{2m} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2} + \frac{A^2 + \frac{1}{2mc}}{A^1 + mM}}{\operatorname{tg} \frac{u}{2} + \frac{A^2 - \frac{1}{2mc}}{A^1 + mM}} \right|_{u_0}^{u_1}; \tag{6}$$

b) în cazul semidreptelor, folosind relația (5) și prima relație (4) în care am luat $\alpha = 0$,

$$s = \frac{1}{2m} \ln x^1 \Big|_{x_0^1}^{x_1^1}; \tag{7}$$

c) în cazul porțiunilor de parabolă, folosind relația (5) și prima ecuație (4) în care am luat $\alpha \neq 0$,

$$s = \frac{1}{2m} \ln \left| \frac{m\alpha u - p + 1}{m\alpha u - p - 1} \right|_{u_0}^{u_1} \tag{8}$$

B. — Să considerăm două puncte $A(a^i)$ și $B(b^i)$ ale spațiului (1) și să facem o transformare de coordonate astfel ca cele două puncte să fie într-o situație particulară. Pentru aceasta să observăm că o transformare de variabile de forma:

$$\begin{aligned}
 x^1 &= X^1 \\
 x^2 &= X^2 + m(a^{2h-1}X^{2h} - a^{2h}X^{2h-1}) + a^2 \\
 x^K &= X^K + a^K \quad (k = 3, \dots, 2p)
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

lasă invariantă metrica (1), însă în noile variabile X^i punctul A are toate coordonatele nule în afară de prima. Să presupunem deci că avem $A(a, 0, \dots, 0)$.

Să observăm acum că dacă introducem coordonatele polare cu ajutorul transformării

$$\begin{aligned} x^{2h-1} &= \rho_h \cos \theta_h \\ x^{2h} &= \rho_h \sin \theta_h \quad (h=2, \dots, p) \end{aligned} \quad (10)$$

obținem

$$\begin{aligned} (dx^k)^2 &= (d\rho_h)^2 + \rho_h^2 (d\theta_h)^2 \\ dx^2 - m(x^{2h-1}dx^{2h} - x^{2h}dx^{2h-1}) &= dx^2 - m\rho_h^2 d\theta_h, \end{aligned} \quad (11)$$

metrica (1) devenind

$$(12) \quad ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + [dx^2 - m\rho_h^2 d\theta_h]^2}{4m^2(x^1)^2} + \frac{(d\rho_h)^2 + \rho_h^2 (d\theta_h)^2}{2mx^1}, \quad (12)$$

care nu se schimbă la o transformare ortogonală a cantităților ρ_h . Putem alege transformarea ortogonală astfel ca pentru punctul B să avem $\rho_3 = \dots = \rho_p = 0$, deci putem presupune întotdeauna că punctul B are toate coordonatele nule în afară de primele patru, adică este de forma $B(b^1, b^2, b^3, b^4, 0, \dots, 0)$.

Ținând seamă că prin două puncte ale spațiului (1) trece o singură geodezică [1], rezultă teorema:

Fiind dată o geodezică a spațiului (1), putem totdeauna presupune, printr-o schimbare de variabile, că ea este situată în varietatea $x^5 = \dots = x^{2p} = 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Vrăncianu: Lecții de geometrie diferențială, vol. III, ed. Acad. R.P.R., 1960.

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОЕКТИВНО-КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ V_{2p} С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Г. Врэнчану установил метрику (I) и уравнения геодезических кривых проективно-комплексных пространств V_{2p} . Автор настоящей статьи даёт конечные формулы длины дуги для каждого типа геодезических кривых, найденных Г. Врэнчану. Одновременно он устанавливает следующую теорему:

При существовании геодезической пространственной кривой (I) всегда можно предположить, пользуясь некоторой заменой переменных, что она превращается в кривую, расположенную в пространстве $x^5 = \dots = x^{2p} = 0$.

**SUR LES GEODESIQUES DES ESPACES PROJECTIFS COMPLEXES V_{2p}
À COURBURE NÉGATIVE**

R É S U M É

G. Vrănceanu a donné la métrique (1) et les équations des courbes géodésiques des espaces projectifs complexes V_{2p} . Dans ce travail on donne les formules finies pour la longueur de l'arc sur chacun des types des courbes géodésiques obtenus par G. Vrănceanu. De même on établit le théorème suivant :

Etant donnée une courbe géodésique de l'espace (1), on peut toujours trouver un mouvement de l'espace qui la transforme en une courbe située dans l'espace $x^5 = \dots = x^{2p} = 0$.

ASUPRA SIMILITUDINILOR DIN SPAȚIUL EUCLIDIAN CU TREI DIMENSIUNI

IOANA DRĂGHICI

Transformările lineare din planul complex și deci similitudinile din planul real, care li se atașează, sînt clasificate, după cercurile și fasciculele de cercuri pe care le lasă invariante, în transformări eliptice, hiperbolice, parabolice și loxodromice.

M. Stoka a dat o interpretare geometrică acestor transformări, atașîndu-le o anumită proiectivitate dintr-un spațiu ambiant [2]*.

Se știe [3]** că singurele transformări din spațiul cu trei dimensiuni, care lasă invariantă mulțimea sferelor propriu-zise*** sînt similitudinile.

În lucrarea de față vom clasifica similitudinile din spațiul E_3 , după sferele și fasciculele de sfere pe care le lasă invariante, atașînd similitudinii respective o anumită proiectivitate din spațiul E_4 în care este scufundat spațiul E_3 .

Fie E_4 un spațiu euclidian cu patru dimensiuni de coordonate carteziene ortogonale $x = \frac{x_1}{x_5}$, $y = \frac{x_2}{x_5}$, $z = \frac{x_3}{x_5}$, $t = \frac{x_4}{x_5}$. Vom numi hipersfera de ecuație :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0 \quad (1)$$

hipersfera de bază, iar hiperplanul $t = 0$ hiperplanul ecuatorial.

Proiecția stereografică din Polul Sud $S(0, 0, 0, -1, 1)$, a hipersferei de bază pe hiperplanul ecuatorial, stabilește o corespondență biunivocă între punctele lui E_4 și sferele K^{****} din hiperplanul ecuatorial, punctului $Y(y_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) corespunzîndu-i sfera :

$$(y_4 + y_5)(x^2 + y^2 + z^2) - 2y_1x - 2y_2y - 2y_3z + y_5 - y_4 = 0 \quad (2)$$

și reciproc, y_i fiind coordonatele pentasferice ale sferei (2) [1]

* Pag. 65.

** Pag. 271.

*** Inversiunile transformă anumite sfere în plane și reciproc.

**** Numim sfere K mulțimea sferelor propriu-zise, punctelor și planelor dintr-un hiperplan.

***** Pag. 250.

Vom considera acum în hiperplanul ecuatorial similitudinea :

$$\begin{cases} x = h(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z}) + a_1 \\ y = h(a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}\bar{z}) + a_2 \quad (h \neq 0) \\ z = h(a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}\bar{z}) + a_3 \end{cases} \quad (3)$$

unde determinantul $\|a_{ij}\|$ este ortogonal.

Aplicînd sferei (2) similitudinea (3), aceasta devine :

$$(\bar{y}_4 + \bar{y}_5)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) - 2\bar{y}_1\bar{x} - 2\bar{y}_2\bar{y} - 2\bar{y}_3\bar{z} + \bar{y}_5 - \bar{y}_4 = 0, \quad (4)$$

unde am pus :

$$\begin{cases} \rho \bar{y}_j = h \left[\sum_{i=1}^3 a_{ij} y_i - \left(\sum_{i=1}^3 a_i a_{ij} \right) (y_4 + y_5) \right], \quad (j = 1, 2, 3) \\ \rho \bar{y}_4 = \sum_{i=1}^3 a_i y_i + \frac{h^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + 1}{2} y_4 + \frac{h^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 1}{2} y_5, \\ \rho \bar{y}_5 = - \sum_{i=1}^3 a_i y_i + \frac{h^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 1}{2} y_4 + \frac{h^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 1}{2} y_5. \end{cases} \quad (5)$$

Dacă notăm cu $\bar{Y}(y_i)$ punctul corespunzător în E_4 sferei (4), formulele (5) reprezintă formulele de transformare ale punctului $Y(y_i)$ atașat sferei (2) în punctul $\bar{Y}(\bar{y}_i)$ atașat sferei (4).

Deci, prin proiecția stereografică a hipersferei (1) pe hiperplanul ecuatorial se atașează biunivoc similitudinii (3) proiectivitate a (5).

Se poate arăta ușor că transformarea (5) formează un grup cu șapte parametri subgrup al grupului proiectiv.

Vom studia acum proprietățile subgrupului proiectiv cu șapte parametri (5) și le vom transforma apoi, prin proiecția stereografică, în proprietăți ale grupului similitudinilor (3).

Să căutăm în primul rînd punctele unite ale transformării (5). Pentru aceasta vom observa că dacă considerăm în loc de coordonatele y_i , coordonatele, $y_4 + y_5$, $y_5 - y_4$, y_1 , y_2 , y_3 , proiectivitatea (5) se scrie :

$$\begin{cases} \rho (\bar{y}_4 + \bar{y}_5) = h^2 (y_4 + y_5), \\ \rho (\bar{y}_5 - \bar{y}_4) = \left(\sum_{i=1}^3 a_i^2 \right) (y_4 + y_5) + y_5 - y_4 - 2 \sum_{i=1}^3 a_i y_i, \\ \rho \bar{y}_j = h \left[- \left(\sum_{i=1}^3 a_i a_{ji} \right) (y_4 + y_5) + \sum_{i=1}^3 a_{ij} y_i \right], \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (6)$$

Punînd deci, ca de obicei, $\bar{y} = y$ [3]* sistemul (6) devine :

$$\begin{cases} (h^2 - \rho)(y_4 + y_5) = 0, \\ \left(\sum_{i=1}^3 a_i^2\right)(y_4 + y_5) + (1 - \rho)(y_5 - y_4) - 2 \sum_{i=1}^3 a_i y_i = 0, \\ h \left(\sum_{i=1}^3 a_i a_{ij}\right)(y_4 + y_5) - \sum_{i=1}^3 (h a_{ij} - \delta_{ij}^j \rho) y_i = 0, \quad (j = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (7)$$

unde δ_{ij}^j sînt simbolii lui Kroneker.

Deci ecuația în ρ se scrie :

$$\begin{vmatrix} h^2 - \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^3 a_i^2 & 1 - \rho & -2a_1 & -2a_2 & -2a_3 \\ h \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} & 0 & -(h a_{11} - \rho) & -h a_{21} & -h a_{31} \\ h \sum_{i=1}^3 a_i a_{2i} & 0 & -h a_{12} & -(h a_{22} - \rho) & -h a_{32} \\ h \sum_{i=1}^3 a_i a_{3i} & 0 & -h a_{13} & -h a_{23} & -(h a_{33} - \rho) \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

și are soluțiile

$$\begin{cases} \rho_1 = 1 \\ \rho_2 = h \\ \rho_3 = h^2 \\ \rho_4 = h \frac{\alpha_{123} - 1 + \sqrt{(\alpha_{123} + 1)(\alpha_{123} - 3)}}{2}, \\ \rho_5 = h \frac{\alpha_{123} - 1 - \sqrt{(\alpha_{123} + 1)(\alpha_{123} - 3)}}{2}, \end{cases} \quad (9)$$

unde am pus :

$$\alpha_{123} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad (10)$$

Întrebuițind pentru coeficienții a_{ij} expresiile în funcție de unghiurile lui Euler [3]** obținem :

$$\alpha_{123} = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\varphi + \psi}{2} - 1. \quad (11)$$

* Pag. 417.

** Pag. 214.

Deci expresiile de sub radicali ρ_4 și ρ_5 devin :

$$(\alpha_{123} + 1)(\alpha_{123} - 3) = 16 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\varphi + \psi}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\varphi + \psi}{2} - 1 \right). \quad (12)$$

Dar

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\varphi + \psi}{2} \leq 1,$$

deci

$$(\alpha_{123} + 1)(\alpha_{123} - 3) \leq 0. \quad (13)$$

Rezultă că ρ_4 și ρ_5 , dacă sînt distincte sînt imaginare.

Pentru ca ρ_4 și ρ_5 să fie reale trebuie să avem :

$$\alpha_{123} = 3,$$

sau

$$\alpha_{123} = -1.$$

Vom studia pe rînd aceste două cazuri

În cazul întîi avem

$$\sum_{i=1}^3 a_{ii} = 3. \quad (14)$$

Dar

$$|a_{ii}| \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3),$$

deci relația (14) devine :

$$a_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (15)$$

Înlocuind aceste valori în relațiile de ortogonalitate dintre a_{ij} obținem :

$$a_{ij} = 0 \quad (i \neq j = 1, 2, 3) \quad (16)$$

În acest caz rădăcinile ecuației (8) sînt :

$$\rho_1 = 1; \rho_2 = \rho_4 = \rho_5 = h; \rho_3 = h^2.$$

Dacă $h^2 \neq 1$, ecuația (8) are o rădăcină triplă $\rho_{2,4,5} = h$. În acest caz sistemul (7) se scrie :

$$\begin{cases} y_4 + y_5 = 0 \\ \sum_{i=1}^3 a_{ii} y_i + (1 - h) y_4 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

deci proiectivitatea (5) are un plan de puncte unite.

Dacă $h = -1$ ecuația (8) are o rădăcină triplă $\rho_{2,4,5} = -1$ și una dublă $\rho_{1,3} = 1$.

În acest caz sistemul (7) se scrie :

$$\begin{cases} y_4 + y_5 = 0 \\ \sum_{i=1}^3 a_i y_i + 2y_4 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

și

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 a_i y_i - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} (y_4 + y_5) = 0 \\ y_k - \frac{a_k}{2} (y_4 + y_5) = 0 \quad (k = 1, 2) \end{cases} \quad (19)$$

deci proiectivitatea (5) are o dreaptă și un plan de puncte unite dacă $\sum_{i=1}^3 a_i^2 \neq 0$ sau două plane de puncte unite dacă $a_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

Dacă $h = 1$ ecuația (8) are o rădăcină de multiplicitatea 5.

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = 1.$$

În acest caz sistemul (7) se scrie :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 a_i y_i - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} (y_4 + y_5) = 0 \\ a_i (y_4 + y_5) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (20)$$

Dacă $a_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) proiectivitatea (5) este o identitate, iar dacă $\sum_{i=1}^3 a_i^2 \neq 0$ sistemul (7) se scrie

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 a_i y_i = 0 \\ y_4 + y_5 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Deci proiectivitatea (5) are un plan de puncte unite.

În cazul al doilea avem :

$$\sum_{i=1}^3 a_{ii} = -1 \quad (22)$$

și rădăcinile ecuației (8) sînt :

$$\rho_1 = 1, \rho_2 = h, \rho_3 = h^2, \rho_4 = \rho_5 = -h.$$

Dacă $h^2 \neq 1$, ecuația (8) are o rădăcină dublă $\rho_{4,5} = -h$. În acest caz sistemul (7) se scrie

$$\begin{cases} y_4 + y_5 = 0 \\ \sum_{i=1}^3 a_i y_i + (1+h)y_4 = 0 \\ (a_{11} + 1)y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Deci proiectivitatea (5) are o dreaptă de puncte unite.

Dacă $h = -1$, ecuația (8) are o rădăcină quadruplă $\rho_{1,3,4,5} = 1$. În acest caz sistemul (7) se scrie :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 a_i y_i - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} (y_4 + y_5) = 0 \\ (a_{11} + 1)y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 - \left(\sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} \right) (y_4 + y_5) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

deci proiectivitatea (5) are un plan de puncte unite dacă $\sum_{i=1}^3 a_i^2 \neq 0$, sau un hiperplan de puncte unite dacă $a_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$)

Dacă $h = 1$, ecuația (8) are o rădăcină triplă $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$ și una dublă $\rho_4 = \rho_5 = -1$.

În acest caz sistemul (7) se scrie :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 a_i y_i - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} (y_4 + y_5) = 0 \\ (a_{11} - 1)y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 - \left(\sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} \right) (y_4 + y_5) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

și

$$\begin{cases} y_4 + y_5 = 0 \\ \sum_{i=1}^3 a_i y_i + 2y_4 = 0 \\ (a_{11} + 1)y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

deci proiectivitatea (5) are o dreaptă și un plan de puncte unite dacă $\sum_{i=1}^3 a_i^2 \neq 0$, sau o dreaptă și un hiperplan de puncte unite dacă $a_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

Vom presupune acum că :

$$\begin{aligned} \alpha_{123} &\neq -1 \\ \alpha_{123} &\neq 3 \end{aligned}$$

deci rădăcinile ρ_4 și ρ_5 sînt imaginare.

Dacă $h = -1$, ecuația (8) are o rădăcină dublă $\rho_1 = \rho_3 = 1$. În acest caz sistemul (7) se scrie :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 a_i y_i - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} (y_4 + y_5) = 0 \\ \sum_{i=1}^3 (a_{ik} + \delta_i^k) y_i - \left(\sum_{i=1}^3 a_i a_{ki} \right) (y_4 + y_5) = 0 \quad (k = 1, 2), \end{cases} \quad (27)$$

deci proiectivitatea (5) are o dreaptă de puncte unite, dacă $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$, sau un plan de puncte unite dacă $a_i = 0$.

Dacă $h = 1$, ecuația (8) are o rădăcină triplă și anume :

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$$

În acest caz sistemul (7) se scrie :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 a_i y_i - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} (y_4 + y_5) = 0 \\ \sum_{i=1}^3 (a_{ik} - \delta_i^k) y_i - \left(\sum_{i=1}^3 a_i a_{ki} \right) (y_4 + y_5) = 0 \quad (k = 1, 2), \end{cases} \quad (28)$$

deci proiectivitatea (5) are o dreaptă de puncte unite.

Vom presupune acum că sîntem în cazul general, cînd toate rădăcinile ecuației (8) sînt distincte, deci :

$$\alpha_{123} \neq -1, \alpha_{123} \neq 3, h^2 \neq 1.$$

Înlocuind valorile (9) în sistemul (7) obținem cele cinci puncte unite ale transformării (5) :

$$Y_1(0, 0, 0, -1, 1) \equiv S$$

$$Y_2 \left[a_{13} + a_{31}, a_{23} + a_{32}, 1 - a_{11} - a_{22} + a_{33}, \frac{\sum_{i=1}^3 (a_{3i} + a_{i3}) a_i + a_3(1 - \alpha_{123})}{h - 1}, - \frac{\sum_{i=1}^3 (a_{3i} + a_{i3}) a_i + a_3(1 - \alpha_{123})}{h - 1} \right]$$

$$Y_3 \left[a_{13} + a_{31}\sigma_1, a_{23} + a_{32}\sigma_1, (a_{33} - 1)(\sigma_1 + 1), \frac{\sum_{i=1}^3 a_i(a_{i3} + a_{3i}\sigma_1) - a_3(\sigma_1 + 1)}{h\sigma_1 - 1}, - \frac{\sum_{i=1}^3 a_i(a_{i3} + a_{3i}\sigma_1) - a_3(\sigma_1 + 1)}{h\sigma_1 - 1} \right]$$

$$Y_4 \left[a_{13} + a_{31}\sigma_2, a_{23} + a_{32}\sigma_2, (a_{33} - 1)(\sigma_2 + 1), \frac{\sum_{i=1}^3 a_i(a_{i3} + a_{3i}\sigma_2) - a_3(\sigma_2 + 1)}{h\sigma_2 - 1}, - \frac{\sum_{i=1}^3 a_i(a_{i3} + a_{3i}\sigma_2) - a_3(\sigma_2 + 1)}{h\sigma_2 - 1} \right]$$

$$Y_5(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$$

unde am pus

$$\sigma_{1,2} = \frac{\alpha_{123} - 1 \pm \sqrt{(\alpha_{123} + 1)(\alpha_{123} - 3)}}{2}$$

$$y_j = (a_{jj} + h^2) \left(\sum_{i=1}^3 a_i a_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \left[(a_{jk} + h a_{kj}) \sum_{i=1}^3 a_i a_{ik} \right]$$

$$y_4 + y_5 = h^3 - \alpha_{123} h^2 + \alpha_{123} h - 1$$

$$y_5 - y_4 = \frac{2}{1 - h^2} \sum_{i=1}^3 \left\{ (a_{jj} + h^2) \left(\sum_{i=1}^3 a_i a_{ij} \right) + \sum_{i=1}^3 \left[(a_{jk} + h a_{kj}) \sum_{i=1}^3 a_i a_{ik} \right] \right\} + \frac{h^2 + (1 - \alpha_{123})h + 1}{h + 1} \sum_{i=1}^3 a_i^2$$

Din aceste expresii rezultă că punctele Y_2, Y_3 , și Y_4 sînt în hiperplanul tangent la hipersfera de bază în Polul Sud, iar punctul Y_5 pe hipersfera de bază. Punctele Y_3 și Y_4 sînt imaginare, dar mijlocul lor M este real, avînd coordonatele :

$$\begin{aligned} m_1 &= a_{13}[(\alpha_{123} - 1)h - 2] - a_{31}(\alpha_{123} - 1) + h a_{31}[(\alpha_{123} - 1)^2 - 3] \\ m_2 &= a_{23}[(\alpha_{123} - 1)h - 2] - a_{32}(\alpha_{123} - 1) + h a_{32}[(\alpha_{123} - 1)^2 - 3] \\ m_3 &= (a_{33} - 1)[h(\alpha_{123} - 1)^2 + (h - 1)(\alpha_{123} - 1) - 3h - 2] \\ m_4 &= m_5 = \sum_{i=1}^3 a_i [2a_{i3} + a_{3i}(\alpha_{123} - 1)] - a_3(\alpha_{123} + 1) \end{aligned} \quad (29)$$

Pentru a transforma acum proprietățile proiectivității (5), în proprietăți ale similitudinei (3) vom folosi cîteva corespondențe pe care le-a stabilit anterior M. Stoka [1]*.

Unei drepte din E_4 îi corespunde un fascicol de sfere din hiperplanul ecuatorial, unui plan îi corespunde o rețea de sfere, iar unui hiperplan îi corespunde un complex de sfere. În particular, hiperplanului $y_4 + y_5 = 0$ îi corespunde mulțimea planelor din hiperplanul ecuatorial, deci unei drepte din hiperplanul $y_4 + y_5 = 0$ îi corespunde un fascicol de plane, iar unui plan din acest hiperplan o rețea de plane.

Teorema 1. *Proiectivității (5) care lasă invariant planul (17) îi corespunde în hiperplanul ecuatorial o similitudine compusă dintr-o translație de componente a_i și dintr-o dilatare de modul $h \neq \pm 1$. Această similitudine lasă invariant punctul $A\left(\frac{a_1}{1-h}, \frac{a_2}{1-h}, \frac{a_3}{1-h}\right)$, fascicolul de sfere concentrice cu centrul în A și planele rețelei de plane, care trec prin punctul A .*

* Pag. 251.

Într-adevăr proiectivitatea (5) care lasă invariant planul (17) este proiectivitatea cu $\alpha_{123} = 3$, $h^2 \neq 1$. Acestei proiectivități îi corespunde în hiperplanul ecuatorial similitudinea :

$$\begin{aligned}x &= h\bar{x} + a_1 \\y &= h\bar{y} + a_2 \\z &= h\bar{z} + a_3\end{aligned}\quad (30)$$

care este tocmai similitudinea din teoremă.

În acest caz, proiectivitatea (5) lasă invariante punctele S și Y_5 (în care am făcut înlocuirea $\alpha_{123} = 3$) și planul (17). De asemenea, transformă dreapta SY_5 în ea însăși.

Punctul Y_5 are în acest caz coordonatele :

$$\begin{cases} y_j = (1 - h)a_j, & (j = 1, 2, 3) \\ y_4 + y_5 = (1 - h)^2, \\ y_5 - y_4 = \sum_{i=1}^3 a_i^2, \end{cases}$$

din proiecția lui stereografică pe hiperplanul ecuatorial este punctul

$$A \left(\frac{a_1}{1-h}, \frac{a_2}{1-h}, \frac{a_3}{1-h} \right).$$

Dreptei SY_5 îi corespunde în hiperplanul ecuatorial fascicolul de sfere concentrice, cu centrul în $A[1]^*$. Deci prin similitudinea (30) acest fascicol rămîne invariant.

Planului (17) îi corespunde în hiperplanul ecuatorial rețeaua de plane :

$$y_1 \left(x - \frac{a_1}{1-h} \right) + y_2 \left(y - \frac{a_2}{1-h} \right) + y_3 \left(z - \frac{a_3}{1-h} \right) = 0 \quad (31)$$

care este tocmai rețeaua de plane care trec prin punctul A.

Teorema 2. *Proiectivității (5), care lasă invariante planul (18) și dreapta (19), îi corespunde în hiperplanul ecuatorial similitudinea compusă dintr-o translație de componente $a_i \neq 0$ și dintr-o simetrie față de origine. Această similitudine lasă invariant punctul $A \left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{2} \right)$ planele rețelei de plane care trec prin acest punct și sferile cu centrul în acest punct.*

Într-adevăr, proiectivitatea (5) care lasă invariante planul (18) și dreapta (19) este proiectivitatea cu $\alpha_{123} = 3$, $h = -1$, deci în hiperplanul ecuatorial îi corespunde similitudinea din teoremă.

Această proiectivitate lasă invariante planul (18) căruia îi corespunde în hiperplanul ecuatorial rețeaua de plane :

$$y_1 \left(x - \frac{a_1}{2} \right) + y_2 \left(y - \frac{a_2}{2} \right) + y_3 \left(z - \frac{a_3}{2} \right) = 0 \quad (32)$$

și dreapta (19) căreia îi corespunde în hiperplanul ecuatorial fascicolul de sfere :

$$\left(x - \frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a_2}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a_3}{2}\right)^2 + 1 - \frac{\sum_{i=1}^3 a_i^2}{2} - a_1 \frac{y_4}{y_1} = 0 \quad (33)$$

care este tocmai fascicolul de sfere concentrice cu centrul în A.

Deci, similitudinea din teoremă lasă invariante planele care trec prin punctul A — rețeaua (32) — și sferile cu centrul în A — fascicolul (33). Din aceasta rezultă invarianța punctului A.

Teorema 3. *Proiectivității (5), care lasă invariant planul (21) îi corespunde în hiperplanul ecuatorial o translație de componente $a_i \neq 0$, care lasă invariante planele paralele cu vectorul de componente a_i .*

Într-adevăr, proiectivitatea (5), care lasă invariant planul (21) este proiectivitatea cu $\alpha_{123} = 3$, $h = 1$, deci în hiperplanul ecuatorial îi corespunde translația

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + a_1 \\ y &= \bar{y} + a_2 \\ z &= \bar{z} + a_3 \end{aligned} \quad (34)$$

Această proiectivitate lasă invariant planul (18) căruia îi corespunde în hiperplanul ecuatorial planele

$$y_1(a_3x - a_1z) + y(a_3y_3 - a_2z) + a_3y_4 = 0 \quad (35)$$

Aceste plane trec prin punctul $(a_1, a_2, a_3, 0, 0)$, deci sînt planele din hiperplanul ecuatorial, paralele cu vectorul (a_1, a_2, a_3) .

Teorema 4. *Proiectivității (5), care lasă invariantă dreapta (23), îi corespunde în hiperplanul ecuatorial similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h^2 \neq 1$. Această similitudine lasă invariant planul :*

$$(a_{11} + a_{31})\left(x - \frac{a_1}{1-h}\right) + (a_{23} + a_{32})\left(y - \frac{a_2}{1-h}\right) + 2(a_{33} + 1)\left(z - \frac{a_3}{1-h}\right) = 0, \quad (36)$$

dreapta :

$$\frac{x - \frac{a_1}{h+1}}{a_{11} + 1} = \frac{y - \frac{a_2}{h+1}}{a_{21}} = \frac{z - \frac{a_3}{h+1}}{a_{31}} \quad (37)$$

planele care trec prin aceasta și punctul lor de intersecție.

Într-adevăr, proiectivitatea (5), care lasă invariantă dreapta (23) are $\alpha_{123} = -1$, $h^2 \neq 1$, deci îi corespunde în hiperplanul ecuatorial similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h^2 \neq 1$. Drepte (23) îi corespunde în hiperplanul ecuatorial fascicolul de plane :

$$y_1 \left[a_{31} \left(x - \frac{a_1}{h+1} \right) - (a_{11} + 1) \left(z - \frac{a_3}{h+1} \right) \right] + y_2 \left[a_{31} \left(y - \frac{a_2}{h+1} \right) - a_{21} \left(z - \frac{a_3}{h+1} \right) \right] = 0 \quad (38)$$

Deci similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h^2 \neq 1$, lasă invariante planele fascicolului (38), deci și axa acestui fascicol, care este tocmai dreapta (37).

Punctul Y_2 devine pentru $\alpha_{123} = -1$, punctul de coordonate :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{13} + a_{31} \\ y_2 &= a_{23} + a_{32} \\ y_3 &= 2(a_{33} + 1) \\ y_4 &= -y_5 = \frac{-\sum_{i=1}^3 a_i y_i}{h-1} \end{aligned} \quad (39)$$

Acestui punct îi corespunde în hiperplanul ecuatorial planul (36), care rămâne deci invariant la similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h^2 \neq 1$.

Punctul de intersecție al dreptei (37) cu planul (36) rămâne evident invariant la această similitudine. Se poate verifica ușor că el corespunde punctului Y_5 pentru $\alpha_{123} = -1$.

Teorema 5. *Proiectivității (5), care lasă invariant planul (24), îi corespunde în hiperplanul ecuatorial similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h = -1$. Această similitudine lasă invariant planul :*

$$(a_{13} + a_{31})\left(x - \frac{a_1}{2}\right) + (a_{23} + a_{32})\left(y - \frac{a_2}{2}\right) + 2(a_{33} + 1)\left(z - \frac{a_3}{2}\right) = 0 \quad (40)$$

și sferele rețelei de sfere :

$$\begin{aligned} y_1 &\left\{ [a_1 a_{31} - a_3(a_{11} + 1)](x^2 + y^2 + z^2 + 1) - \left(a_{31} \sum_{i=1}^3 a_i^2 - 2a_3 \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} \right) x - \right. \\ &\left. - \left[2a_1 \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} - (a_{11} + 1) \sum_{i=1}^3 a_i^2 \right] z \right\} + y_2 [(a_2 a_{31} - a_3 a_{21})(x^2 + y^2 + z^2 + 1) - \\ &- \left(a_{31} \sum_{i=1}^3 a_i^2 - 2a_3 \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} \right) y - (2a_2 \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} - a_{21} \sum_{i=1}^3 a_i^2) z] - \\ &- y_4 \left(a_{31} \sum_{i=1}^3 a_i^2 - 2a_3 \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} \right) = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

Într-adevăr, proiectivitatea (5), care lasă invariant planul (24) are $\alpha_{123} = -1$, $h = -1$, deci în hiperplanul ecuatorial îi corespunde similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h = -1$.

Punctul Y_2 cu $h = -1$ are coordonatele :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{13} + a_{31} \\ y_2 &= a_{23} + a_{32} \\ y_3 &= 2(a_{33} + 1) \\ y_4 &= -y_5 = -\frac{\sum_{i=1}^3 a_i y_i}{2} \end{aligned} \quad (42)$$

Acestui punct îi corespunde în hiperplanul ecuatorial (40), care rămîne deci invariant la similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h = -1$.

Planului (24) îi corespunde în hiperplanul ecuatorial rețeaua de sfere (41), deci sferile acestei rețele rămîn invariante la similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h = -1$.

Teorema 6. *Proiectivității (5), care lasă invariant planul (25) și dreapta (26), îi corespunde în hiperplanul ecuatorial similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h = 1$. Această similitudine lasă invariante sferile rețelei de sfere :*

$$\begin{aligned} & y_1 \left\{ [a_{131} - a_3(a_{11} - 1)](x^2 + y^2 + z^2 + 1) - \left(a_{31} \sum_{i=1}^3 a_i^2 - 2a_3 \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} \right) x - \right. \\ & \left. - \left[2a_1 \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} - (a_{11} - 1) \sum_{i=1}^3 a_i^2 \right] z \right\} + y_2 \left\{ (a_2 a_{31} - a_3 a_{21})(x^2 + y^2 + z^2 + 1) - \right. \\ & \left. - \left[a_{31} \sum_{i=1}^3 a_i^2 - 2a_3 \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} \right] y - \left(2a_2 \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} - a_{21} \sum_{i=1}^3 a_i^2 \right) z \right\} - \\ & - y_3 \left(a_{31} \sum_{i=1}^3 a_i^2 - 2a_3 \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

dreapta :

$$\frac{x - \frac{a_1}{2}}{a_{11} + 1} = \frac{y - \frac{a_2}{2}}{a_{21}} = \frac{z - \frac{a_3}{2}}{a_{31}} \quad (44)$$

și planele care trec prin ea.

Într-adevăr, proiectivitatea (5) care lasă invariant planul (25) și dreapta (26) are $\alpha_{123} = -1$, $h = 1$, deci în hiperplanul ecuatorial îi corespunde similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h = 1$.

Planului (25) îi corespunde în hiperplanul ecuatorial rețeaua de sfere (43) deci sferile acestei rețele rămîn invariante la similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h = 1$.

Dreptei (26) îi corespunde în hiperplanul ecuatorial fascicolul de plane :

$$y_1 \left[a_{31} \left(x - \frac{a_1}{2} \right) - (a_{11} + 1) \left(z - \frac{a_3}{2} \right) \right] + y_2 \left[a_{31} \left(y - \frac{a_2}{2} \right) - a_{21} \left(z - \frac{a_3}{2} \right) \right] = 0 \quad (45)$$

Deci similitudinea (3) cu $\alpha_{123} = -1$, $h = 1$ lasă invariante planele fascicolului (45) și deci și axa acestui fascicol, care e dreapta (44).

Teorema 7. *Proiectivității (5), care lasă invariantă dreapta (27) îi corespunde în hiperplanul ecuatorial similitudinea (3) cu $\alpha_{123} \neq 1$, $\alpha_{123} \neq 3$, $h = -1$.*

Această similitudine lasă invariant planul :

$$(a_{13} + a_{31})\left(x - \frac{a_1}{2}\right) + (a_{23} + a_{32})\left(y - \frac{a_2}{2}\right) + (1 - a_{11} - a_{22} + a_{33})\left(z - \frac{a_3}{2}\right) = 0 \quad (46)$$

și sferile fascicolului de sfere concentrice :

$$\left| \begin{array}{ccc} 2x & 2y & 2z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{11} + 1 & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + 1 & a_{32} \end{array} \quad \begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 + 1 \\ \sum_{i=1}^3 a_i^2 \\ 2 \\ \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} \\ \sum_{i=1}^3 a_i a_{2i} \end{array} \right| + 2 \frac{y_4}{y_4 + y_5} [a_1(a_{13} - a_{31})] + a_2(a_{23} - a_{32}) + a_3(1 + \alpha_{123}) = 0 \quad (47)$$

Într-adevăr proiectivitatea (5) care lasă invariantă dreapta (27) are $\alpha_{123} \neq 1$, $\alpha_{123} \neq 3$, $h = -1$, deci în hiperplanul ecuatorial îi corespunde similitudinea din teoremă. Această proiectivitate are dreapta (27) ca dreaptă de puncte unite și punctul Y_2 în care facem $h = -1$ ca punct unit. Punctului Y_2 cu $h = -1$ îi corespunde în hiperplanul ecuatorial planul (46), iar drepte (27) fascicolul de sfere (47). Deci planul (46) și sferile fascicolului (47) rămân invariante la similitudinea (3) cu $\alpha_{123} \neq -1$, $\alpha_{123} \neq 3$, $h = -1$.

Teorema 8. Proiectivității (5) care lasă invariantă dreapta (28), îi corespunde în hiperplanul ecuatorial similitudinea (3) cu $\alpha_{123} \neq -1$, $\alpha_{123} \neq 3$, $h = 1$. Această similitudine lasă invariante sferile fascicolului de sfere concentrice.

$$\left| \begin{array}{ccc} 2x & 2y & 2z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{11} - 1 & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - 1 & a_{32} \end{array} \quad \begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 + 1 \\ \sum_{i=1}^3 a_i^2 \\ 2 \\ \sum_{i=1}^3 a_i a_{1i} \\ \sum_{i=1}^3 a_i a_{2i} \end{array} \right| + 2 \frac{y_4}{y_4 + y_5} [a_1(a_{13} + a_{31}) + a_2(a_{23} + a_{32}) + a_3(1 - a_{11} - a_{22} + a_{33})] = 0 \quad (48)$$

Într-adevăr proiectivitatea (5) care lasă invariantă dreapta (28) are $\alpha_{123} \neq -1$, $\alpha_{123} \neq 3$, $h = 1$, deci în hiperplanul ecuatorial îi corespunde similitudinea (3) cu $\alpha_{123} \neq -1$, $\alpha_{123} \neq 3$, $h = 1$. Această proiectivitate are dreapta (28) ca dreaptă de puncte unite. Acestei drepte îi corespunde în hiperplanul ecuatorial fascicolul de sfere (48). Deci sferile fascicolului (48) rămân invariante la similitudinea din teoremă.

Teorema 9. *Proiectivităţii (5), care nu lasă invariantă nici o dreaptă, plan sau hiperplan, îi corespunde în hiperplanul ecuatorial similitudinea generală cu $\alpha_{123} \neq -1$, $\alpha_{123} \neq 3$, $h^2 \neq 1$. Această similitudine lasă invariant planul:*

$$(a_{13} + a_{31})\left(x - \frac{a_1}{h-1}\right) + (a_{23} + a_{32})\left(y - \frac{a_2}{h-1}\right) + (1 - a_{11} - a_{22} + a_{33})\left(z - \frac{a_3}{h-1}\right) = 0 \quad (49)$$

nelăsînd invariantă nici o sferă.

Am văzut că în cazul în care avem $\alpha_{123} \neq -1$, $\alpha_{123} \neq 3$, $h^2 \neq 1$ proiectivitatea (5) nu lasă nici o dreaptă, plan sau hiperplan invariant. Deci, în acest caz, proiectivităţii (5) îi corespunde similitudinea generală (3) cu $\alpha_{123} \neq -1$, $\alpha_{123} \neq 3$, $h^2 \neq 1$. Proiectivitatea (5) are, în acest caz, ca puncte unite reale S, Y_2, Y_3 . Punctului S îi corespunde în hiperplanul ecuatorial punctul lui Möbius; lui Y_3 îi corespunde punctul unit al similitudinii (3); iar lui Y_2 îi corespunde planul (19), care rămîne, deci invariant la similitudinea din teoremă.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Stoka: Coordonatele tetraciclice şi aplicaţiile lor la clasificarea conicelor G.M.F. nr. 6, 1953.
2. M. Stoka: Asupra unei interpretări geometrice a transformărilor lineare din planul complex şi a similitudinilor din planul real. Revista Universităţii C. I. Parhon nr. 4, 1954.
3. G. Vranceanu: Geometrie analitică proiectivă şi diferenţială Bucureşti 1961.

К ВОПРОСУ О ПОДОБИЯХ В ЭВКЛИДОВСКОМ ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе даётся классификация подобий в пространстве E_3 соответственно сферам и отдельным частям сфер, находящихся впереди, причисляя соответствующему подобию проективность (5) пространства E_4 , в котором погружено пространство E_3 .

Устанавливая различные значения количества h и $\alpha_{123} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ получаем девять различных типов подобий.

SUR LES SIMILITUDES DE L'ESPACE EUCLIDIEN À TROIS DIMENSIONS

RÉSUMÉ

Dans ce travail on classifie les similitudes (3) de l'espace E_3 , d'après les sphères et les fascicules de sphères qu'elles laissent invariantes, en attachant à la similitude respective la projectivité (5) de l'espace E_4 où est plongé l'espace E_3 .

En donnant les diverses valeurs des quantités h et $\alpha_{123} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ on obtient neuf types de similitudes différents.

CAZURILE DE CONSERVARE A UNGHIURILOR PROIECȚIE

ȘTEFAN D. TEODORESCU

1. În legătură cu proiecțiile unghiurilor se cunosc următoarele propoziții :

a) În orice fel de proiecție, unghiul din spațiu se proiectează egal pe un plan dacă laturile lui sînt paralele cu planul.

b) În cazul unghiului drept, folosind proiecția ortogonală, este suficient ca numai o latură a unghiului să fie paralelă cu planul de proiecție.

c) În orice fel de proiecție, există și alte cazuri cînd unghiul din spațiu se proiectează egal pe un plan.

d) Dacă numai o latură a unui unghi obtuz sau ascuțit este paralelă cu planul de proiecție, atunci proiecția ortogonală a unghiului obtuz pe acest plan e un unghi obtuz și întotdeauna mai mare decît unghiul din spațiu, iar proiecția ortogonală a unghiului ascuțit este un unghi ascuțit întotdeauna mai mic decît unghiul care se proiectează, în ambele cazuri egalitatea nefiind posibilă.

Pe cale analitică, conf. H. Bodnărescu* a stabilit în legătură cu proiecțiile ortogonale ale unghiurilor ascuțite sau obtuze, condiții ca unghiul proiecție să fie egal cu unghiul contraproiecție, înțelegînd prin unghi de contraproiecție unghiul din spațiu care se proiectează. De asemenea este indicată și o construcție grafică a unghiului contraproiecție (unghiul din spațiu) cînd se cunoaște o latură a lui și unghiul proiecție, condiția fiind ca cele două unghiuri să fie egale.

În lucrarea de față se studiază, pe cale geometrică, problema proiecției cilindrice și conice a unghiurilor din spațiu după unghiuri egale. Se arată că un unghi dat în plan este proiecția oblică într-o direcție dată a unei infinități de unghiuri din spațiu egale cu el.

Lucrarea se bazează pe folosirea locurilor geometrice în spațiu — sfere, conuri, toruri — pentru rezolvarea unor probleme dificile de unghiuri în epură de geometrie descriptivă, fără calculul de geometrie analitică.

În cazul proiecției ortogonale se stabilesc cazurile în care unghiului proiecție dat îi corespund unghiuri egale în spațiu, demonstrîndu-se cîteva teoreme.

* Gazeta Matematică și Fizică seria A, nr. 7, 1956.

2. *Direcția de proiecție* (Δ, δ) oarecare. Să demonstrăm că unui unghi proiecție $\widehat{x\alpha y} < 90^\circ$ îi corespunde la o direcție (Δ) dată, o infinitate de unghiuri în spațiu egale cu el.

Se cunoaște deci unghiul proiecție $\widehat{x\alpha y} < 90^\circ$ și direcția de proiecție (Δ) , (δ) , (fig. 1).

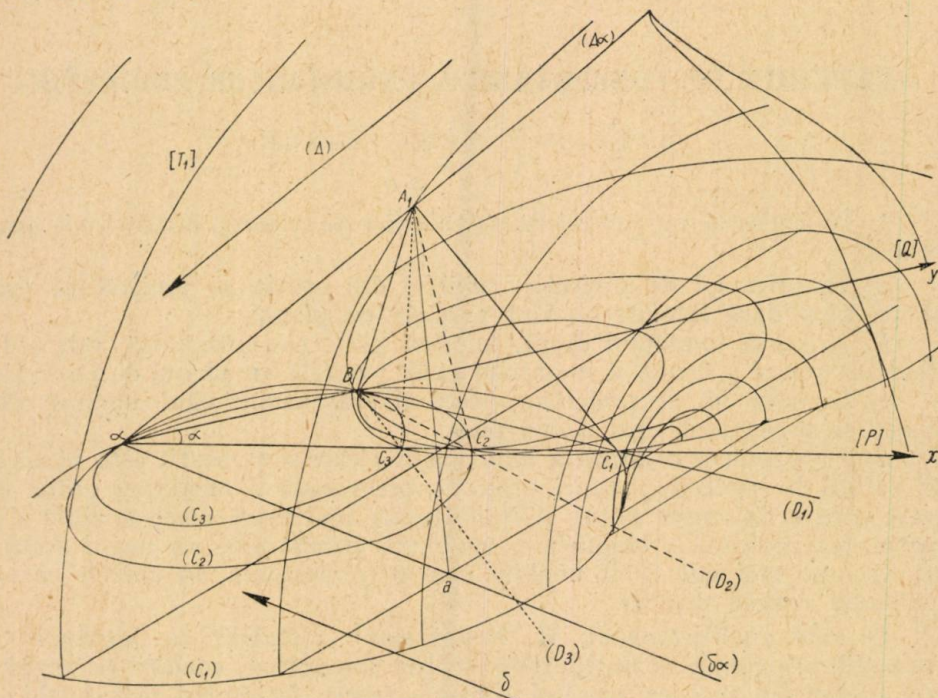


Fig. 1.

Dreapta (Δ_α) ce trece prin α și este paralelă la direcția (Δ) , cu latura αx definesc planul $[P]$. Tot această dreaptă cu latura αy definesc planul $[Q]$.

Se ia un punct B pe dreapta αy . Prin B se duce o dreaptă (D_1) a planului $x\alpha y$ care intersectează dreapta αx în C_1 . Locul geometric al tuturor punctelor din care segmentul BC_1 se vede sub $\angle \alpha$ este cercul (C_1) care prin rotirea în jurul dreptei BC_1 dă naștere unui tor $[T_1]$. Torul astfel obținut este locul geometric al tuturor punctelor din spațiu din care segmentul BC_1 se vede sub unghiul $\widehat{x\alpha y} = \alpha$.

Torul, fiind o suprafață de gradul 4, este intersectat de raza proiectantă (Δ_α) , (δ_α) în patru puncte, din care două sînt întotdeauna reale, celelalte două puncte putînd fi reale sau imaginare.

Fie A_1 al doilea punct real de intersecție al razei proiectante (Δ_α) (δ_α) cu torul $[T_1]$. Rezultă că $\sphericalangle BA_1C_1$ este egal cu $\sphericalangle x\alpha y$, latura BA_1 găsindu-se în planul $[Q]$ iar A_1C_1 în planul $[P]$.

Ducînd prin B o altă dreaptă (D_2) care intersectează latura αx în punctul C_2 și construind torul $[T_2]$ ca loc geometric al punctelor din spațiu din care segmentul de dreaptă BC_2 se vede sub unghiul $\alpha x y$, să presupunem că suprafața acestui tor $[T_2]$ este intersectată de aceeași rază proiectantă (Δ_α) tot în punctul A_1 , de unde rezultă $\sphericalangle BA_1C_2 = \sphericalangle x\alpha y$, cu latura BA_1 confundată cu latura BA_1 a unghiului BA_1C_1 iar latura A_1C_2 în planul $[P]$.

În fine ducînd o a treia dreaptă (D_3) prin B ce intersectează latura αx în punctul C_3 , diferit de punctele C_1 și C_2 și construind torul $[T_3]$, ca loc geometric al punctelor din spațiu din care segmentul de dreaptă BC_3 se vede sub unghiul $\alpha x y$, să presupunem că și această suprafață este intersectată de aceeași rază proiectantă (Δ_α) tot în punctul A_1 .

Rezultă un al treilea unghi BA_1C_3 cu latura BA_1 comună cu laturile BA_1 ale unghiurilor BA_1C_2 și BA_1C_1 , iar latura A_1C_3 în planul $[P]$.

Presupunînd că A_1 este vîrfurile comun al celor trei unghiuri egale, avînd o latură comună BA_1 , celelalte laturi ale unghiurilor, A_1C_1 , A_1C_2 , A_1C_3 nu pot fi decît generatoarele unui con de rotație cu axul de rotație BA_1 . Cum însă laturile A_1C_1 , A_1C_2 , A_1C_3 se găsesc în același plan $[P]$, rezultă că nu putem avea o dreaptă în spațiu care să formeze același unghi $\geq 90^\circ$ cu mai mult decît două drepte dintr-un plan. De aici deducem că cele trei unghiuri BA_1C_1 , BA_1C_2 , BA_1C_3 , egale cu unghiul $\alpha x y$, nu pot avea decît vîrfuri diferite pe raza proiectantă (Δ_α) respectiv în A_1 , A_2 , A_3 . Întrucît prin punctul B putem duce o infinitate de drepte care să intersecteze latura αx a unghiului $\alpha x y$ în C_n puncte, în care n ia diferite valori de la zero la infinit, luînd locurile geometrice ale punctelor din spațiu din care segmentele BC_i ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) se văd sub unghiul α se obțin o infinitate de toruri T_i . Aceste toruri sînt intersectate de dreapta (Δ_α) în puncte diferite A_i , obținîndu-se o mulțime de unghiuri BA_iC_i ($i = 1, 2, \dots,$

$n, \dots$), egale cu $\alpha x y$, cu laturile ce trec prin același punct B , cu vîrfurile A_i pe (Δ_α) iar laturile A_iC_i în planul $[P]$.

Luînd punctul B variabil pe latura αy se obțin alte mulțimi de unghiuri egale cu $\alpha x y$, cu o latură a unghiurilor trecînd prin punctul B_i , respectiv vîrfurile găsindu-se pe dreapta (Δ_α) iar celelalte laturi ale unghiurilor fiind conținute în planul $[P]$.

3. *Proiecția conică.* În cazul proiecției conice, refăcînd raționamentul din § 2 se ajunge la același rezultat, dreapta (Δ_α) fiind definită de centrul de proiecție și de vîrfurile α al unghiului $\alpha x y$.

4. *Cazul proiecției ortogonale pentru unghiuri $\geq 90^\circ$.* Dîndu-se un unghi proiecție $\alpha x y = \alpha$, pentru a găsi în proiecția ortogonală, unghiurile din spațiu egale cu unghiul α , se procedează ca în proiecția cilindrică oblică.

Se ia un punct B pe una din laturile unghiului proiecție, de exemplu pe αx . Se duce prin acest punct o dreaptă (D) a planului $\alpha x y$, ce intersec-

proiectantă ortogonală este tangentă la tor, deci unghiurile din spațiu se confundă cu unghiul proiecție; acestea corespund cazurilor cînd laturile unghiului din spațiu sînt paralele cu planul de proiecție.

Se exclude cazul cînd vîrfurile a al unghiului xay se găsește pe arcu BPC, deoarece $\sphericalangle xay = 180^\circ - \alpha$; deci unghiul din spațiu egal cu $\sphericalangle \alpha$ se proiectează după un unghi egal cu suplimentul lui.

Rezultă că unui unghi proiecție xay pentru a-i corespunde unghiuri egale în spațiu trebuie ca vîrfurile unghiului proiecție să se găsească numai pe arcele de cerc a_1B și a_3C ale cercului (c). În aceste cazuri, coarda BC, ce subîntinde arcu capabil de $\sphericalangle \alpha$, face cu sensul pozitiv al uneia din laturile unghiurilor înscrise în cerc anumite unghiuri (fig. 3).

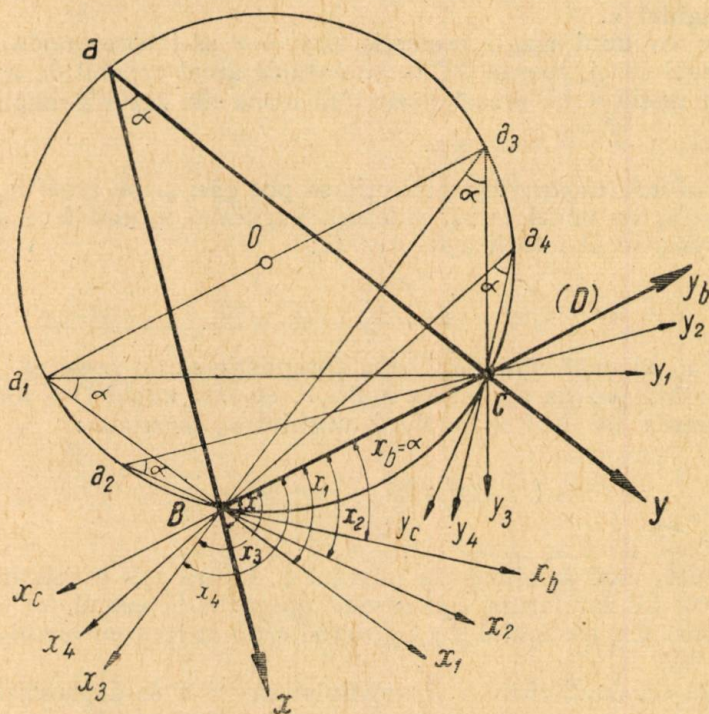


Fig. 3.

Pentru unghiul $x_1a_1y_1$ cu vîrfurile a_1 la intersecția diametrului paralel la BC cu cercu, valoarea unghiului x_1 , ce-l formează latura BC cu sensul pozitiv al laturii a_1Bx_1 , este

$$x_1^0 = \frac{\widehat{BC} + \widehat{a_1B}}{2} = \frac{2\alpha + \left(\frac{180^\circ - 2\alpha}{2}\right)}{2} = \frac{2\alpha + (90^\circ - \alpha)}{2}$$

$$x_1^0 = \frac{90^\circ + \alpha}{2}$$

Vîrful a_1 al unghiului $Ba_1C = \alpha$ apropiindu-se de punctul B și căpătînd poziția a_2 pe arcul a_1B , latura a_2Bx_2 a acestui unghi face un unghi x_2 cu coarda BC mai mic decît unghiul x_1 deoarece

$$\angle x_1 = \frac{\widehat{BC} + \widehat{a_1B}}{2}, \quad \angle x_2 = \frac{\widehat{BC} + \widehat{a_2B}}{2} \quad \text{iar} \quad \widehat{a_2B} < \widehat{a_1B}$$

rezultă că $\angle x_2 < \angle x_1$. La limită, cînd a_1 ajunge în B, latura a_1Bx_1 a acestui unghi este tocmai tangenta la cerc în punctul B iar latura a_1Cy_1 se confundă cu coarda BC. Latura Bx_b a unghiului x_bBy_b face cu coarda BC un unghi $x_b = \alpha$. Rezultă că, dacă vîrfurile a al unghiului $xay = \alpha$ se deplasează pe coarda a_1B din punctul a_1 spre B, unghiul ce-l face latura aB cu coarda BC se micșorează de la valoarea $x_1 = \frac{90^\circ + \alpha}{2}$ pînă devine egal cu unghiul α .

Pentru ca unui unghi proiecție $xay = \alpha$ să-i corespundă în spațiu un unghi egal cu el, coarda BC ce subîntinde arcul capabil de $\angle \alpha$ trebuie să facă un unghi x cu sensul pozitiv al uneia din laturile unghiului proiecție astfel ca $\frac{90^\circ + \alpha}{2} > x > \alpha$.

Dar vîrfurile unghiurilor proiecție se pot găsi și pe arcul a_3C . Pentru unghiul $x_3a_3y_3$ cu vîrfurile în a_3 , valoarea unghiului x_3 ce-l face coarda BC cu sensul pozitiv al laturii a_3Bx_3 va fi :

$$x_3 = 180^\circ - \widehat{a_3BC} = 180^\circ - \frac{\widehat{a_3C}}{2} = 180^\circ - \frac{90^\circ - \alpha}{2} = \frac{270^\circ + \alpha}{2}$$

Vîrfurile a_3 al unghiului $Ba_3C = \alpha$ apropiindu-se de punctul C pe arcul a_3C și căpătînd poziția a_4 , latura a_4Bx_4 a acestui unghi face un unghi x_4 fa ă de coarda BC mai mare decît unghiul x_3 deoarece :

$$x_4 = 180^\circ - \frac{\widehat{a_4C}}{2}, \quad x_3 = 180^\circ - \frac{\widehat{a_3C}}{2}$$

ar $\widehat{a_4C} < \widehat{a_3C}$ deci $x_4 > x_3$.

La limită, cînd a_3 ajunge în punctul C, latura a_3B a acestui unghi se confundă cu BC iar latura a_3C devine tangenta la cercul (c) în punctul C ; deci latura Cx_c a unghiului x_cCy_c astfel obținut face un unghi $x_3 = 180^\circ$ cu coarda BC.

Rezultă că, dacă vîrfurile a al unghiului $xay = \alpha$ se deplasează pe arcul a_3C din punctul a_3 spre C, unghiul x ce-l face latura aB a acestui unghi cu coarda BC se mărește de la valoarea

$$x_3 = \frac{270^\circ + \alpha}{2} \text{ pînă la } x_c = 180^\circ.$$

Deci, ca unghiului proiecție să-i corespundă în spațiu un unghi egal, coarda BC ce subîntinde arcul capabil de $\angle \alpha$, trebuie să facă un unghi x cu sensul pozitiv al uneia din laturile unghiului proiecție astfel ca : $\frac{270^\circ + \alpha}{2} < x < 180^\circ$. Cum BC reprezintă, de fapt, urma planului ce conține unghiul din spațiu egal cu unghiul proiecție putem enunța următoarele teoreme :

Teorema I. *În proiecția ortogonală, unui unghi proiecție α cu $\alpha < 90^\circ$ îi corespund în spațiu unghiuri egale cu el, 2 câte 2 simetrice față de planul de proiecție, dacă urmele planelor lor formează unghiul x cu sensul pozitiv al uneia din laturile unghiului proiecție (fig. 4) astfel ca :*

$$\frac{90^\circ + \alpha}{2} > x > \alpha \quad \text{sau} \quad \frac{270^\circ + \alpha}{2} < x < 180^\circ$$

Cum urmele planelor, în condițiile teoremei I, intersectează laturile unghiului proiecție în punctele B și C numai de aceeași parte a vârfului A al unghiului ascuțit, rezultă :

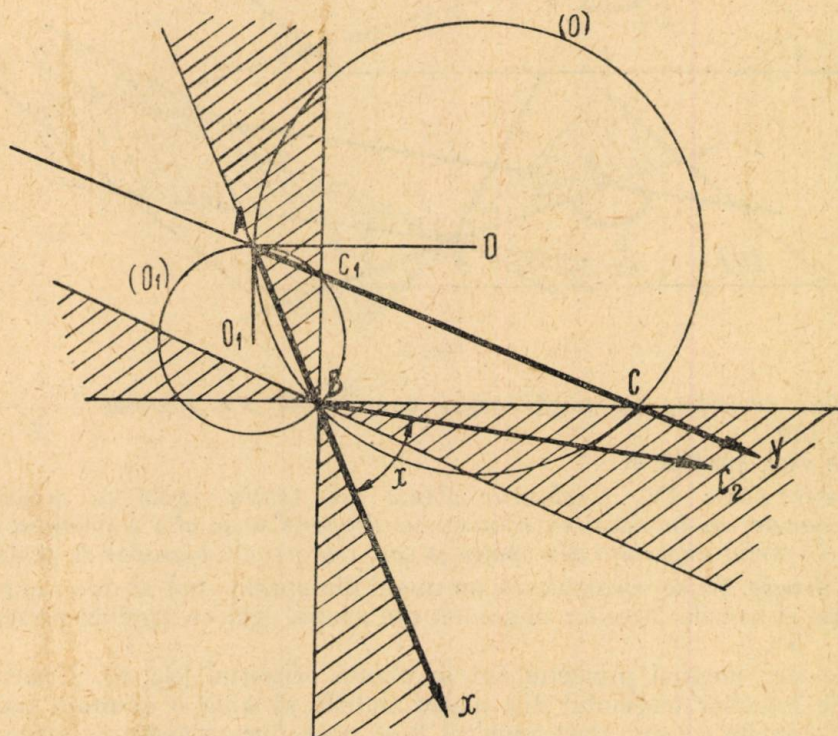


Fig. 4.

Teorema II. *Unghiurile din spațiu ascuțite, egale cu proiecțiile lor ortogonale din planul [H], au întotdeauna semilaturile numai de aceeași parte a planului [P], plan care trece prin vârful A al unghiului din spațiu și care este paralel la planul de proiecție [H] (fig. 5).*

Unghiul β , suplimentul unghiului ascuțit $BAC = \alpha$, este un unghi obtuz și se proiectează ortogonal pe planul [H] după un unghi egal cu β , numai dacă unghiul α se proiectează ortogonal egal pe [H].

Deci, rezultă :

Teorema III. *În cazul proiecției ortogonale, unui unghi obtuz proiecție îi corespunde în spațiu unghiuri egale, dacă urmele planelor ce conțin unghiurile din spațiu, formează cu sensul pozitiv al uneia din laturile*

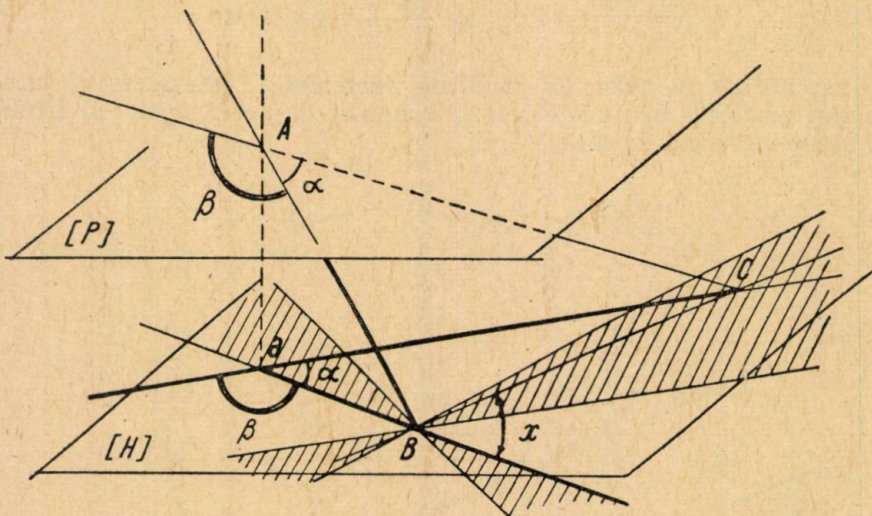


Fig. 5.

unghiului proiecție, un unghi astfel ca : $\frac{90^\circ + \alpha}{2} > x > \alpha$ sau $\frac{270^\circ + \alpha}{2} < x < 180^\circ$.

De aici, rezultă și

Teorema IV. *Unghiurile obtuze din spațiu, egale cu proiecțiile lor ortogonale, au întotdeauna semilaturile deoparte și de alta a planului care trece prin vârful unghiului din spațiu și care este paralel planului de proiecție.*

Aplicație. Să se construiască un unghi din spațiu când se dau : unghiul proiecție și urmele laturilor unghiului din spațiu egal cu unghiul proiecție.

Fie $\widehat{xay}$ unghiul proiecție dat în planul orizontal (fig. 6). Urmele B și C ale laturilor unghiului din spațiu trebuie să aibă o anumită poziție pentru a exista soluții. Dacă punctul B se poate lua oriunde pe latura ax,

punctul C va trebui să se găsească pe latura ay astfel încât $\widehat{CBx}$ să îndeplinească condiția : $\frac{90^\circ + \alpha}{2} > \widehat{CBx} > \alpha$ sau $\frac{270^\circ + \alpha}{2} < x < 180^\circ$.

Această zonă se obține ușor grafic. Se duce prin a o perpendiculară pe ax în planul orizontal. Construind bisectoarea unghiului $\widehat{y_1ay}$ unghiul $x = \frac{90^\circ + \alpha}{2} = \widehat{Zay}$ care se ia față de sensul pozitiv al laturii ax și cu

vîrful în B. Construind perpendiculara la Bc_1 din punctul B, se obține $\angle xBc_2 = \left(\frac{270^\circ + \alpha}{2}\right)$. Prin B se duce o paralelă la ay . Această paralelă cu dreapta Bc_1 limitează o zonă în care se poate duce urma planului. A doua zonă este limitată de dreptele ax și BC_2 . Punctul C se ia

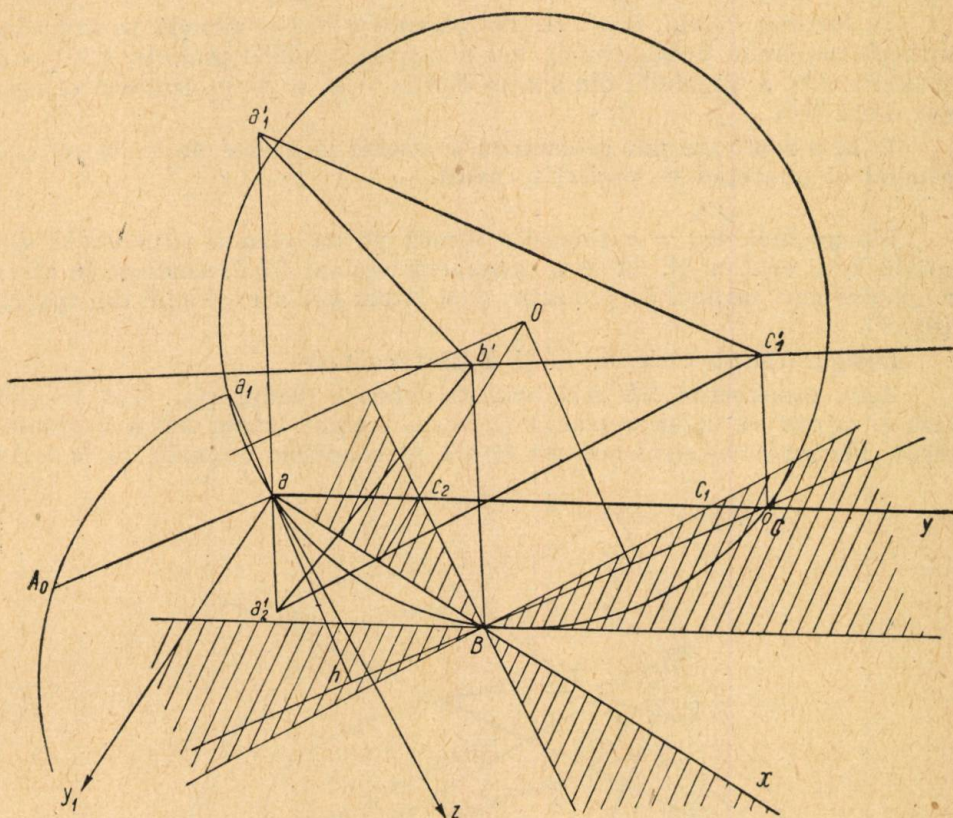


Fig. 6.

deci pe latura ay numai în zona hașurată, iar BC este urma planului ce conține unghiul din spațiu egal cu unghiul α (fig. 6).

Se construiește torul ca loc geometric al punctelor din spațiu astfel ca segmentul Bc să fie privit sub $\angle xay$. Pentru aceasta se ia mai întâi cercul ce trece prin punctele a, B, c și apoi se rotește în spațiu în jurul lui Bc . Pentru a intersecta verticala din a cu torul se duce prin verticală planul perpendicular pe Bc pentru ca secțiunea în tor să fie cercuri. Secțiunea în tor cu acest plan vertical este cercul cu centrul în h și rază ha_1 . Rabatînd acest plan vertical pe planul orizontal, unde perpendiculara din a pe ha_1 intersectează cercul de centru h și rază ha_1 este vîrful unghiului

și AB_2 sînt tocmai laturile unghiurilor B_1AC și B_2AC astfel că $\widehat{B_1AC} = \widehat{B_2AC} = \widehat{x\alpha y} = \alpha$. Deci pot exista două soluții.

Secțiunea în con cu planul $[P]$ poate fi obținută în trei feluri :

a) Se construiește baza conului pe planul $x\alpha y$. Dacă latura αx a unghiului intersectează baza conului există soluție iar punctele de intersecție unite cu vîrfurile A dau laturile unghiurilor cerute.

b) *Metoda sferelor auxiliare*. Se ia o sferă cu centrul în A și de rază oarecare. Se intersectează sfera cu conul și cu planul $[P]$. Punctele de intersecție ale cercurilor rezultate din intersecțiile sferei cu conul și cu planul $[P]$ unite cu A dau cele două drepte de secțiune ale planului $[P]$ în conul de rotație — respectiv laturile unghiurilor cerute. Se recomandă această metodă deoarece în cazul primei soluții baza conului de rotație pe planul $x\alpha y$ poate fi elipsă, hiperbolă sau parabolă și intersecția laturii αx cu aceste curbe plane de gradul 2 se face folosind construcții grafice destul de complicate.

c) *Metoda planelor auxiliare* cu plane perpendiculare pe axul de rotație. Secțiunea în con în acest caz este un cerc. Punctele de intersecție ale dreptei de intersecție dintre planul auxiliar și planul $[P]$ cu cercul de secțiune, unite cu vîrfurile A dau laturile unghiurilor cerute.

În *epură* putem lua de la început unghiul proiecție $x\alpha y = \alpha$ în planul orizontal, s, s' drept centrul de proiecție S din spațiu și un punct C pe una din laturile unghiului proiecție (de exemplu, pe latura αy) prin care va trece latura CA a unghiului din spațiu (fig. 8).

Vîrfurile A al unghiului cerut trebuie luate pe raza proiectantă $S\alpha$ în a' pe $s'\alpha'$ și a pe $s\alpha$. Se face o schimbare de plan de proiecție vertical, luînd noul plan de proiecție chiar planul vertical al dreptei CA sau un plan paralel cu el pentru a construi cu ușurință conul de rotație cu axul latura AC .

În noul sistem O_1x_1 de plane de proiecție, conul de rotație are ca generatoare de contur aparent vertical, dreptele $a'_1m'_1$ și $a'_1n'_1$ ce formează unghiuri egale cu α față de a_1C .

Pentru a căpăta secțiunea în conul de rotație cu planul $[P]$ s-a folosit metoda planelor auxiliare cu plane perpendiculare pe axul de rotație.

În sistemul o_1x_1 axul conului fiind conținut în planul vertical de proiecție planul $[R_1]$ perpendicular pe AC este un plan de capăt. Planul $[P]$ definit de dreapta SA și αx are ca urmă orizontală latura αx iar urma verticală în sistemul o_1x_1 este $\beta a'_1$, în care β este intersecția laturii αx cu o_1x_1 . Din intersecția planului $[R_1]$ cu conul rezultă cercul (C_1) . Din intersecția planului $[R_1]$ cu planul $[P] \equiv [P]$ rezultă dreapta H_1V_1 . Pentru a afla punctele de intersecție ale dreptei H_1V_1 cu cercul (C_1) se folosește rabaterea planului R_1 pe planul vertical de proiecție al sistemului o_1x_1 . Dreapta H_1V_1 rabatăută în $H_0V'_1$ intersectează cercul $(C_1)_0$ rabatat în punctele I_0 și II_0 care au ca proiecție $(1,1')$ și $(2,2')$. Unind punctul a cu 1 și 2 rezultă proiecțiile orizontale ale laturilor celor două unghiuri din spațiu

DIE FÄLLE DER PROJEKTIONSWINKELTREUE

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird die Frage der zylindrischen und konischen Projektion der Raumwinkel nach gleichen Winkeln behandelt. Es wird auf geometrischem Wege bewiesen, dass ein in einer Ebene gegebener Winkel die in einer gegebenen Richtung schräge Projektion einer unendlichen Reihe von Raumwinkeln ist, die mit ihm gleich sind.

Die Arbeit beruht auf dem Gebrauch von geometrischen Orten im Raum — Sphären, Kegel, Wülste — zur Lösung von schweren Problemen, die in den darstellenden geometrischen Aufzügen der Raumwinkel vorkommen, ohne Berechnungen der analytischen Geometrie.

Im Falle der orthogonalen Projektion werden die Fälle festgestellt, in welchen dem gegebenen Projektionswinkel gleiche Raumwinkel entsprechen. In demselben Falle werden auch einige Sätze bewiesen.

SUPRAFETE RIEMANNIENE PARȚIAL REGULAT EXHAUSTIBILE

CABIRIA ANDREIAN CAZACU

În cadrul teoriei repartiției valorilor funcțiilor analitice, problema valorilor multiple, deci a zerourilor și a polilor derivatei a ocupat din primul moment un loc central. Cercetările lui R. Nevanlinna ([1] sau [2], p. 24 și 350) au deschis noi perspective în această problemă. Într-adevăr, a doua teoremă fundamentală, bazată pe lema despre derivata logaritmică, pune în evidență importanța valorilor multiple finite sau nu. Cu ajutorul indicelui de ramificare, R. Nevanlinna delimitează numărul valorilor multiple și obține în particular următoarea proprietate: o funcție meromorfă poate avea cel mult 4, iar o funcție întreagă cel mult 2 *valori complet ramificate*¹. Un nou moment de dezvoltare al problemei, îl constituie teoria metrico-topologică a lui L. V. Ahlfors ([3] sau [2], p. 308), care a pus în evidență aspectul geometric, legând studiul valorilor multiple ale unei funcții analitice de ramificarea suprafeței riemanniene generate de această funcție. Cercetarea valorilor este înlocuită cu considerarea acoperirii diferitelor domenii din suprafața de bază, cazul punctual fiind obținut la limită. Ahlfors demonstrează astfel *teorema discurilor*², din care deduce următorul rezultat corespunzător teoremei lui R. Nevanlinna despre valorile complet ramificate: Pentru suprafețele riemanniene regulat exhaustibile simplu conexe, există cel mult 4 domenii complet ramificate, iar, în ipoteza unei valori lacunare, cel mult 2. Era tocmai epoca în care prof. S. Stoilow introducea definiția riguroasă a noțiunii de suprafață riemanniană de acoperire, și folosind metode topologice, stabilea teorema discurilor pentru o nouă clasă de suprafețe riemanniene: Suprafețele normale exhaustibile simplu conexe admit cel mult un domeniu complet ramificat, ([4] sau [2], p. 360). Limitarea găsită de S. Stoilow era mai bună decât cea dată de L. V. Ahlfors, dar cele două rezultate aveau domenii de aplicație diferite. De atunci cadrul cercetării a fost extins la suprafețe cu ordin de conexiune arbitrar atât în teoria lui Ahlfors (a se vedea de ex. [5], II § 2), cât și în direcția lui Stoilow ([2], p. 366). Într-o serie de

¹ Valoarea a se numește *complet ramificată* pentru funcția analitică $f(z)$, dacă ecuația $f(z) = a$ are numai rădăcini multiple.

² Se numește *disc* sau *domeniu complet ramificat* un domeniu jordanian, care nu este coperit complet de nici o foaie simplă.

lucrări am stabilit teorema discurilor pentru suprafețe normal exhaustibile oarecare [6], pentru suprafețele A_∞ a lui L. I. Volkovski [7] și pentru suprafețele E-cvasinormal exhaustibile a lui T. Kuroda [8].

În această lucrare ne propunem să studiem din punct de vedere al ramificării o clasă de suprafețe riemanniene mai generală decât aceea a suprafețelor normal exhaustibile: suprafețele parțial regulat exhaustibile, pe care le-am introdus în cercetări anterioare ([8], [9]) și care cuprinde suprafețele E-cvasinormal exhaustibile și A_∞ . În prima parte a lucrării aplicăm metoda topologică și obținem o generalizare a teoremei discurilor. În partea a doua stabilim legătura între suprafețele parțial regulat exhaustibile și suprafețele regulat exhaustibile, determinând astfel condiții de aplicabilitate a metodei metrico-topologice.

I. Ramificarea suprafețelor riemanniene parțial regulat exhaustibile

Fie T o transformare interioară a varietății bidimensionale V în suprafața orientabilă S . Acoperirea riemanniană ([2], p. 195) $(S)_T^V$ este *parțial regulată* ([10], VI, IV) dacă

(β_1) Oricare ar fi șirul de puncte $P_n \in V$, tinzând către frontiera lui V , șirul $p_n = T(P_n)$ tinde către frontiera lui S sau către un număr finit de curbe jordaniane γ , disjuncte două câte două, fiecare frontieră comună la două domenii disjuncte din $S - \gamma$.

(β_2) Mulțimea $T^{-1}(\gamma)$ este vidă sau compactă pe V .

Acoperirea riemanniană $(S)_T^V$ este *parțial regulat exhaustibilă* ([8], [9]), dacă există un șir de exhaustiune format din domenii poliedrice¹ $V_v \subset V$, astfel încât $(S)_T^{int V_v}$ să fie o acoperire parțial regulată relativ la un sistem finit de curbe jordaniane γ_v de pe S .

Pentru a stabili teorema discurilor în cazul suprafețelor riemanniene parțial regulat exhaustibile, vom cerceta mai întâi ramificarea unuia dintre domeniile șirului de exhaustiune V_v peste S și apoi vom trece la limită: $v \rightarrow \infty$. Spre a simplifica scrierea, în § 1 vom suprima indicele v , care intervine în fiecare etapă a calculului.

§ 1. Presupunem deci că $(S)_T^{int V}$ este o acoperire parțial regulată, unde V este o suprafață bordată (domeniul poliedric V_v) cu ordinul de conexiune c , iar frontiera Γ a lui V , formată din μ curbe jordaniane, se proiectează pe N^1 curbe $\gamma = \{\gamma_i\}$, care descompun S în N^2 domenii D_j de conexiune c_j^2 . Notînd cu n_j numărul foilor acoperirii peste D_j , formula lui S. Stoilow ([10], VI, IV) dă pentru ordinul total de ramificare r al acoperirii:

$$r = \sum n_j(2 - c_j) + c - 2 \quad (1)$$

¹ V_v este un domeniu compact pe V cu frontiera formată dintr-un număr finit de curbe jordaniane, disjuncte două câte două Γ_v .

² Dacă c_0 este ordinul de conexiune a lui S presupus finit, g_0 și g_j genul respectiv, iar μ_0 și μ_j numărul elementelor frontierei a lui S și D_j , demonstrăm imediat că $g_0 - 1 = \sum g_j +$

Vom cerceta următoarele trei tipuri de domenii jordanice Δ complet ramificate, situate în T (int V) și disjuncte două câte două:

- 1) Δ'_s ($s = 1, \dots, h'$), fiecare Δ'_s fiind inclus într-un D_j ,
- 2) Δ''_t ($t = 1, \dots, h''$), fiecare Δ''_t conținând cel puțin un D_j și avînd frontiera în $S - \gamma$.
- 3) Δ'''_u ($u = 1, \dots, h'''$), frontiera fiecărui Δ'''_u intersectînd mulțimea γ într-un număr finit (cel puțin două) de puncte¹.

Vom admite că pe frontiera acestor domenii nu se găsește nici un punct de ramificare. Ținînd seama că Δ'_s , Δ''_t și Δ'''_u au fost presupuse complet ramificate, dar că ramificarea acoperirii peste ele este cel mult egală cu r , vom stabili o inegalitate relativă la numărul acestor domenii (10').

1) Fie δ'_k un domeniu maxim a lui Δ'_s . Acoperirea (int $\Delta'_s|_T$)^{int} δ'_k fiind totală, formula lui Hurwitz ([2], p. 218) ne dă

$$r'_k = n'_k + c'_k - 2,$$

dacă notăm cu c'_k ordinul de conexiune a lui δ'_k , cu n'_k numărul foilor și cu r'_k ordinul total de ramificare al acestei acoperiri. Ipoteza că Δ'_s este complet ramificat implică $n'_k \geq 2$, iar faptul că este un domeniu jordanian, $c'_k \geq 1$. Sumăm pentru toate domeniile δ'_k de pe Δ'_s inegalitatea $r'_k \geq n'_k - 1$, ținînd seama că $\sum n'_k = n_j$ dacă $\Delta'_s \subset D_j$, iar numărul domeniilor δ'_k de pe Δ'_s este $\leq \frac{n_j}{2}$. Sumînd apoi pentru toate domeniile $\Delta'_s \subset D_j$, al căror număr

fie h'_j , și pentru toate domeniile D_j , obținem suma ordinelor punctelor de ramificare proiectate peste $\bigcup \Delta'_s$:

$$\sum r'_k \geq \frac{1}{2} \sum n_j h'_j \quad (2)$$

2) Fie acum δ''_t un domeniu maxim a lui Δ''_t , c''_t ordinul de conexiune a lui δ''_t și r''_t ordinul total de ramificare al acoperirii (int $\Delta''_t|_T$)^{int} δ''_t , care în acest caz este parțial regulată. Aplicînd formula lui S. Stoilow ([10], VI, IV), obținem

$$r''_t = \sum n''_{jt} (2 - c_{jt}) + n_t^* (1 - m_t) + c''_t - 2$$

unde n''_{jt} este numărul foilor lui δ''_t peste domeniul $D_j \subset \Delta''_t$, n_t^* numărul foilor peste $D_{j_t} \cap \Delta''_t$, D_{j_t} domeniul D_j care conține fr Δ''_t , iar m_t numărul curbilor fr D_{j_t} din Δ''_t .

+ $N^1 - N^2$, deoarece $\sum \mu_j = \mu_0 + 2N^1$ și $c_0 - 2 = \sum (c_j - 2)$. S-ar putea însă ca $c_0 = \infty$; în acest caz domeniile $D_j \subset T(V)$ sînt compacte și numerele c_j respective finite, celelalte domenii D_j nu intervin în calcul.

¹ Această condiție este îndeplinită luînd curbele γ și frontierele domeniilor Δ analitice. Aceleași rezultate se obțin dacă permitem ca fr Δ'_s sau fr Δ''_t să coincidă cu o curbă γ . În ultimul caz, D_{j_t} va fi domeniul D_j , care intersectează Δ''_t și pentru care fr $D_{j_t} \supset$ fr Δ''_t .

Ținând seama că pentru $c_l'' = 1$, avem $n_l^* \geq 2$ și în cazul contrar, $c_l'' \geq 2$, vom suma din nou pentru toți δ_l'' corespunzători unui Δ_l'' și apoi pentru toți Δ_l'' . Deducem astfel pentru suma ordinelor punctelor de ramificare proiectate în domeniile Δ_l'' :

$$\Sigma r_l'' \geq \Sigma_1 n_j (2 - c_j) + \Sigma_2 n_j \left(\frac{h_j''}{2} - \mu_j'' \right) \quad (3)$$

unde Σ_1 , se referă la domenii $D_j \subset \bigcup \Delta_l''$, iar Σ_2 la domenii D_j , care intersectează $\bigcup \text{fr} \Delta_l''$; h_j'' reprezintă numărul domeniilor Δ_l'' pentru care $D_j \supset \text{fr} \Delta_l''$ și $\mu_j'' = \Sigma m_t$ pentru aceiași indici t , adică μ_j'' este numărul curbelor din $\text{fr} D_j$ incluse în $\bigcup \Delta_l''$. Evident, $h_j'' \leq \mu_j''$.

În calculul de mai sus, termenul $c_l'' - 2$ a fost înlocuit cu -1 respectiv 0 , după cum $c_l'' = 1$ respectiv ≥ 2 , iar numărul domeniilor δ_l'' pentru care $c_l'' = 1$ a fost majorat cu $\frac{1}{2} \Sigma n_j h_j''$.

3) Fie δ_v''' un domeniu maxim corespunzător unui domeniu Δ_u''' . Vom nota pentru fiecare D_j , care intersectează $\text{fr} \Delta_u'''$ cu Δ_{ujp}''' componentele conexe ale intersecției $D_j \cap \Delta_u'''$ și cu c_{ujp}''' ordinul de conexiune a lui Δ_{ujp}''' . Domeniul Δ_u''' este descompus în domeniile Δ_{ujp}''' și eventuale domenii D_j prin curbe γ_i și prin transversale de pe γ_i , pe care le vom nota γ_{uw} .

Aplicînd acoperirii $(\text{int } \Delta_u''')^{int \delta_v'''}_T$ formula pe care am stabilit-o în lucrarea [11], putem scrie

$$r_v''' = c_v''' - 2 + \sum_{j,p} n_{vujp}''' (2 - c_{ujp}''') + \sum_j n_{vj}''' (2 - c_j) - \sum_w s_{vuw}$$

unde r_v''' este ramificarea acoperirii, c_v''' ordinul de conexiune a lui δ_v''' , iar n_{vujp}''' , n_{vj}''' și s_{vuw} numărul foilor lui δ_v''' peste Δ_{ujp}''' , $D_j \subset \Delta_u'''$ respectiv γ_{uw} .

Vom înlocui din nou $c_v''' - 2$ cu -1 respectiv 0 ca mai sus și vom suma în raport cu domeniile maxime δ_v''' de pe un Δ_u''' și apoi în raport cu Δ_u''' . Obținem astfel

$$\Sigma r_v''' \geq \Sigma_3 n_j (2 - c_j) + \Sigma_4 n_j (h_j''' - \mu_j''') - s - N \quad (4)$$

unde Σ_3 se referă la domenii $D_j \subset \bigcup \Delta_u'''$, Σ_4 la domenii D_j care intersectează $\text{fr} \bigcup \Delta_u'''$, h_j''' este numărul de domenii Δ_{ujp}''' din acești D_j , μ_j''' este numărul curbelor din frontiera acestor D_j incluse în $\bigcup \Delta_u'''$, s este Σs_{uw} pentru toate transversalele γ_{uw} (sau $\Sigma \sigma_i s_i$, dacă s_i este numărul foilor de pe γ_i , iar σ_i numărul transversalelor γ_{uw} de pe γ_i) și N este numărul domeniilor δ_v''' cu $c_v''' = 1$.

¹ Desigur în cazul cînd $D_j \cap \Delta_u'''$ este conex, indicele p nu mai este necesar.

Spre deosebire de cazurile precedente, ramificarea completă a domeniilor Δ_u''' nu ne mai permite să stabilim o inegalitate de forma $N \leq \frac{1}{2} \sum n_j h_j'''$, care poate să nu mai fie adevărată. Într-adevăr se poate ca să avem domenii δ_v''' simplu conexe pentru care $n_{vujp}''' \leq 1$ și $n_{vj}''' \leq 1$, deci care acopăr cu o singură foaie o reuniune simplu conexă de domenii Δ_{ujp}''' și D_j . Fie N_1 numărul acestor domenii δ_v''' simplu conexe și N_2 numărul celorlalte; atunci

$$N_1 + N_2 = N \text{ și } N_1 + 2N_2 \leq \sum_4 n_j h_j''' \quad (5)$$

Iată un exemplu simplu în care toate domeniile δ_v''' sînt din prima categorie: γ_1 este o curbă jordaniană pe sfera S , care cuprinde în interior curba jordaniană γ_2 ; D_1 este domeniul interior lui γ_1 și exterior lui γ_2 ; D_2 și D_3 sînt interiorul curbei γ_2 respectiv exteriorul curbei γ_1 . Suprafața de acoperire $(S)_T^{int V}$ constă din o foaie peste $D_1 \cup \bar{D}_2$ și o foaie peste $D_1 \cup \bar{D}_3$. Prima foaie este legată de a doua prin două ramificări a' și a'' . Să luăm $\Delta_u''' = \Delta$ un domeniu jordanian care lasă în exteriorul său punctele a' și a'' , și a cărui frontieră intersectează γ_1 și γ_2 de două ori, astfel încît se formează trei domenii jordaniane $\Delta \cap \bar{D}_j$, $j = 1, 2, 3$. În cazul acestei acoperiri Δ este complet ramificat în sensul că nu este acoperit complet de nici o foaie simplă, dar prezintă două domenii maxime δ_v''' , fiecare simplu conex și acoperind cu o foaie diferite părți din Δ . Să remarcăm că putem construi oricît de multe domenii Δ_u''' , avînd aceeași așezare ca și Δ , disjuncte două cîte două, deci h_j''' și h''' pot fi oricît de mari. Acest exemplu arată că nu putem spera să găsim o limitare pentru h_j''' și h''' în cazul general.

Teorema de adunare a caracteristicilor ne permite să scriem relațiile

$$\Sigma_1(2 - c_j) = \Sigma_2 \mu_j''', \quad \Sigma_3(2 - c_j) = \Sigma_4 \mu_j''' \quad (6)$$

și

$$h''' = \Sigma_4 h_j''' - N(\gamma_{uw}),$$

unde h''' este numărul domeniilor Δ_u''' , iar $N(\gamma_{uw})$ numărul transverselor γ_{uw} .

Pentru a obține o evaluare a termenului N să remarcăm că putem distinge două tipuri de domenii δ_v''' și în modul următor: domenii care acopăr total Δ_u''' corespunzător și domenii care îl acopăr cu cel puțin o foaie incompletă. Domeniile de primul tip acopăr fiecare Δ_u''' cu cel puțin

¹ O altă problemă care poate fi tratată prin același procedeu este determinarea domeniilor complet ramificate în sens restrîns: care nu sînt acoperite simplu (total sau parțial) de nici un domeniu simplu conex. În acest caz, $N_1 = 0$ și $N \leq \frac{1}{2} \sum_4 n_j h_j'''$.

două foi complete, iar numărul foilor complete de pe Δ_u''' este cel mult $\min n_j$ pentru acei indici j pentru care D_j intersectează Δ_u''' , astfel încît numărul acestor domenii este majorat de

$$\frac{1}{2} \sum_u \min_{D_j \cap \Delta_u''' \neq \emptyset} n_j \leq \frac{h'''}{2} n^*$$

unde $n^* = \max_u (\min_{D_j \cap \Delta_u''' \neq \emptyset} n_j)$. Numărul domeniilor de cel de al doilea tip este

cel mult egal cu numărul foilor incomplete de pe Δ_u''' , care este majorat de numărul transversalelor neacoperite. Să remarcăm că peste o transversală $\gamma_{uw} \subset \gamma_i \cap \text{fr} D_j$ se termină dinspre D_j un număr de $n_j - s_i$ foi incomplete. Prin urmare, notînd cu $N_j(\gamma_{uw})$ numărul transversalelor γ_{uw} de pe $\text{fr} D_j$, numărul domeniilor δ_v''' de al doilea tip va fi cel mult egal cu

$$\sum_4 n_j N_j(\gamma_{uw}) - 2s,$$

iar

$$\sum_4 N_j(\gamma_{uw}) = 2N(\gamma_{uw}).$$

Obținem astfel următoarea inegalitate

$$N \leq \frac{h'''}{2} n^* + \sum_4 n_j N_j(\gamma_{uw}) - 2s$$

sau

(7)

$$N \leq \frac{h'''}{2} n^* + 2N(\gamma_{uw}) \max_4 n_j - 2s$$

unde $\max_4 n_j$ se referă la domeniile D_j din Σ_4 .

În cazul acoperirilor parțial regulate, avînd proprietatea că pentru fiecare curbă γ_i foi incomplete se termină la numai dintr-o singură parte, majorarea (7) poate fi înlocuită cu o evaluare mai bună,

$$N \leq \frac{h'''}{2} n^* + N(\gamma_{uw}) \max_4 n_j - s \quad (8)$$

deoarece fiecare transversală intervine efectiv odată. Acest caz prezintă interes, fiindcă include suprafețele E-cvasinormal exhaustibile, conform propoziției P_{19} din [9].

Iată un exemplu în care atît evaluarea (7) cît și (8) este exactă. Fie γ o curbă jordaniană pe sfera S și $\text{int} V$ format din două foi ce acopăr complet S legate prin ramificări de ordinul întîi a și b din $\text{ext } \gamma$ și o foaie peste $\text{int } \gamma$, legată de foaia a doua prin ramificări de ordinul întîi c și d. Fie Δ_u''' un domeniu jordanian a cărui frontieră intersectează γ în două puncte, astfel încît $a \in \Delta_u''' \cap \text{ext } \gamma$, iar b, c și d $\notin \Delta_u'''$. Peste Δ_u''' avem două domenii δ_v''' simplu conexe: unul acoperind Δ_u''' total cu două foi și celălalt acoperind simplu $\Delta_u''' \cap \text{int } \gamma$, în timp ce inegalitățile (7) sau (8) dau $N \leq 2$.

O analiză mai adâncă a acoperirii poate preciza totuși evaluarea sumei

$$R = N + s - \sum_j n_j h_j'''$$

în modul următor :

Un domeniu Δ_u''' este împărțit de transversalele γ_{uw} în domenii simplu conexe Δ_{ujp}^* fiecare fiind obținut reunind la Δ_{ujp}''' acele domenii $D_j \subset \Delta_u'''$, care sînt separate de Δ_{ujp}''' prin o curbă γ_i din frontiera lui Δ_{ujp}''' . Aplicînd raționamentul lui L. V. Ahlfors [3], obținem următoarea clasificare a domeniilor Δ_{ujp}^* și a transversalelor γ_{uw} :

Clasa λ cuprinde atît domeniile separate de o transversală, care nu aparține claselor anterioare, cît și aceste transversale noi, $\lambda = 1, 2, \dots, \Lambda - 1$.

Clasa Λ cuprinde un domeniu, pe a cărui frontieră se găsesc numai transversale de clase $\leq \Lambda - 1$ (cazul 1°) sau două domenii limitate de o transversală de clasă Λ (cazul 2°).

Dacă în cazul 2° asociem unul dintre cele două domenii cu unica transversală de clasă Λ , se stabilește în ambele cazuri o corespondență biunivocă între domenii și transversale, exceptînd un ultim domeniu, căruia nu-i corespund transversale. Să notăm Δ_u^0 domeniul Δ_{ujp}''' inclus în el.

Vom considera succesiv contribuția domeniilor Δ_{ujp}^* și transversalelor γ_{uw} la suma R .

Fie Δ_{ujp}^* un domeniu de clasă λ ($\lambda = 1 \dots \Lambda - 1$ respectiv Λ) și γ_{uw} transversala corespunzătoare. Le asociem acele domenii maxime δ_v''' din N , care acoperă Δ_{ujp}^* , dar se termină peste γ_{uw} . Notînd cu $N(\Delta_{ujp}^*)$ numărul lor, putem scrie

$$N(\Delta_{ujp}^*) + s_{uv} - n_j \leq 0.$$

În felul acesta unele domenii δ_v''' din N ar putea fi considerate de mai multe ori. Pe de altă parte nu au fost considerate cele $N_T(\Delta_u''')$ domenii δ_v''' din N care acopăr total Δ_u''' sau cele $N_I(\Delta_u''')$ care îl acopăr cu cel puțin o foaie incompletă, dar această foaie nu se termină pe o transversală γ_{uw} , după ce a acoperit Δ_{ujp}^* corespunzător. Fiecare din aceste domenii acopăr Δ_u^0 cu cel puțin două, respectiv o foaie, deci notînd cu n_j^0 numărul foilor acoperirii lui Δ_u^0 și cu n_u''' numărul foilor complete ce acopăr Δ_u''' avem

$$N_T(\Delta_u''') + N_I(\Delta_u''') - n_j^0 \leq \frac{N_I(\Delta_u''') - n_j^0}{2} \leq -\frac{n_u'''}{2}.$$

Sumînd aceste inegalități, găsim

$$R \leq -\frac{1}{2} \sum_u n_u''' \leq -\frac{n'''}{2} h''' \quad (9)$$

dacă $n''' = \min_u n_u'''$.

¹ Relațiile (2) și (3) se deduc din (4) și (9) prin particularizare. Intr-adevăr, în cazul 1, pentru fiecare $\Delta_s \subset D_j$, numărul foilor complete de pe Δ_s care va înlocui n_u''' este chiar n_j , iar în cazul 2) pentru fiecare Δ_i'' cu fr $\Delta_i'' \subset D_j$, putem lua în loc de Δ_u^0 domeniul $\Delta_i'' \cap D_j$ și cum $N_I = 0$, putem scrie n_j în loc de n_u''' .

Din relațiile (1)—(4) deducem următoarea inegalitate

$$\Sigma_5 n_j \left(2 - c_j^* - \frac{h_j' + h_j''}{2} \right) + R + c - 2 \geq 0, \quad (10)$$

suma Σ_5 fiind extinsă la toate domeniile D_j , care nu sînt incluse în domenii Δ_i'' sau Δ_u''' , iar $c_j^* = c_j - \mu_j'' - \mu_j'''$ fiind ordinul de conexiune al domeniului maxim D_j^* obținut reunind D_j cu domenii D_j , incluse în $\bigcup \Delta_i''$ sau în $\bigcup \Delta_u'''$.

Ținînd seama de relațiile (5)—(9) și de inegalitățile evidente

$$N(\gamma_{uv}) \min s_i \leq s \leq N(\gamma_{uv}) \max s_i,$$

termenul

$$R = N + s - \Sigma_4 n_j h_j'''$$

din (10) poate fi evaluat în diferite moduri.¹

Obținem astfel, aplicînd (9),

$$\Sigma_5 n_j (h_j' + h_j'') + n''' h''' \leq 2[\Sigma_5 n_j (2 - c_j^*) + c - 2]. \quad (10')$$

Dacă ne propunem să considerăm numai domenii complet ramificate de tipul Δ_s sau Δ_t'' , inegalitatea (10) se simplifică. Rezultă atunci

$$\Sigma_6 n_j \left(2 - c_j^* - \frac{h_j' + h_j''}{2} \right) + c - 2 \geq 0, \quad (11)$$

unde Σ_6 este extinsă la domenii D_j , care nu sînt incluse în $\bigcup \Delta_t''$, iar $c_j^* = c_j - \mu_j$ este ordinul de conexiune al domeniului D_j^* format reunind la D_j domeniile Δ_i'' cu fr $\Delta_i'' \subset D_j$. De altfel, inegalitatea (11) rezultă și direct din (1)—(3).

În mod analog, considerînd numai domenii complet ramificate de tipul Δ_s' din (10) sau direct din (1) și (2), obținem

$$\Sigma_7 n_j \left(2 - c_j - \frac{h_j'}{2} \right) + c - 2 \geq 0. \quad (12)$$

Inegalitățile (10)—(12) pot fi completate, aprofundînd ramificarea peste fiecare domeniu D_j în parte și observînd că $V = \text{int } V$, acoperă total D_j . Fie d_{jq} un domeniu maxim al lui D_j din V , cu ordinul de conexiune

¹ Dacă aplicăm (7) sau (8), obținem

$$R \leq \left(-\frac{3}{2} h''' + \Sigma_4 n_j h_j''' \right) \max_4 n_j \text{ respectiv } \left(-\frac{h'''}{2} + \Sigma \tilde{h}_j \right) \max_4 j$$

unde $\tilde{h}_j$ este numărul domeniilor $\Delta_{u'jp}'''$ din D_j , pe frontiera cărora nu se termină nici o foaie a acoperirii lor.

$2 - c_{jq}$. El acoperă total D_j cu n_{jq} foi și este complet ramificat peste cele h'_j domenii Δ'_s din D_j . Prin procedeul folosit mai sus deducem inegalitatea :

$$h'_j \leq 2(2 - c_j) + 2 \frac{c_{jq} - 2}{n_{jq}} \quad (13)$$

Această inegalitate trebuie să aibă loc pentru toate domeniile d_{jq} , astfel încît

$$h'_j \leq 2(2 - c_j) + 2 \min_q \frac{c_{jq} - 2}{n_{jq}} \quad (13')$$

Evident, sumînd pentru toate domeniile d_{jq} , obținem evaluarea mai largă

$$h'_j \leq 2(2 - c_j) + 2 \sum_q \frac{(c_{jq} - 2)^1}{n_j}. \quad (13'')$$

§ 2. Inegalitatea fundamentală (10) permite să stabilim *diferite forme ale teoremei discurilor*. Un rol analog îl poate juca (11) sau (12), iar (13) aduce completări.

Iată cîteva exemple unde, pentru mai multă claritate, vom folosi notația completă : mărimile care intervin la etapa v a exhaustiunii vor fi însoțite de indicele v .

Presupunem domeniile Δ alese independent de exhaustiune, deși același domeniu Δ poate fi un Δ' , un Δ'' sau un Δ''' după etapa v , astfel încît numărul h al acestor domenii este dat prin relația :

$$h = h'_v + h''_v + h'''_v.$$

P_1 . Dacă la fiecare etapă v a exhaustiunii există o mulțime de indici J_v , astfel încît

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{jv}}{M_v} = 1$$

uniform pentru $j \in J_v$ și $M_v = \max_{j \in J_v} n_{jv}$ (adică max pentru indicii j din Σ_5), îndată ce v este destul de mare, avem

$$\sum_{j \in J_v} (h'_{jv} + h''_{jv}) \leq 2 \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \left[\sum_{j \in J_v} \frac{n_{jv}}{M_v} (2 - c_{jv}^*) + \frac{c_v - 2 + R_v}{M_v} \right]. \quad (14)$$

Într-adevăr, să presupunem că membrul al doilea este un număr finit L și să alegem $\varepsilon > 0$, astfel încît $(L + \varepsilon)(1 + \varepsilon) < [L] + 1^2$. Pentru v suficient de mare, membrul al doilea devine mai mic decît $L + \varepsilon$, iar

$$\frac{M_v}{\min_{j \in J_v} n_{jv}} < 1 + \varepsilon, \text{ prin urmare este verificată inegalitatea (14).}$$

¹ Considerînd în loc de D_j domenii $D_j^* = D_j \cup (\cup \Delta_t'')$ pentru $\text{fr } \Delta_t'' \subset D_j$, stabilim formule analoage cu (13), unde h_j se înlocuiește cu $h_j + h_j''$, c_j cu $c_j^* = c_j - \mu_j''$, iar d_{jq} este un domeniu maxim a lui V de pe D_j^* .

² $[L]$ este cel mai mare întreg cu proprietatea : $[L] \leq L$.

Lemă L_1 . Dacă S are gen finit g_0 și, independent de v , este verificată una din următoarele două condiții :

- 1) N_v^2 numărul domeniilor D_{jv} este mărginit, sau
- 2) N_v^1 numărul curbelor γ_v este mărginit,

atunci $|2 - c_{jv}^|$ pentru indicii j cu $D_{jv}^* \subset T(V_v)$ este mărginit independent de v .*

Se observă că $N_v^2 \leq N_v + 1$ și că $N_v^1 \leq C_{N_v}^2 (g_0 + 1)$, astfel încît, dacă S are gen finit, ipotezele 1) și 2) sînt echivalente.

Genul oricărui domeniu D_{jv}^* este cel mult g_0 , iar frontiera lui D_{jv}^* constă din cel mult N_v^1 curbe, încît lema este evidentă.

P_2 . În ipotezele lemei de mai sus dacă pentru orice v există o mulțime de indici J_v astfel încît

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{jv}}{M_v} = 1 \text{ sau } 0$$

după cum $j \in J_v$ respectiv $j \notin J_v$, atunci

$$\sum_{jv} (h'_{jv} + h''_{jv}) \leq 2 \left[\sum_{jv} (2 - c_{jv}^*) + \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{c_v - 2 + R_v}{M_v} \right]. \quad (14')$$

În particular, P_1 și P_2 se aplică dacă pentru fiecare v există un domeniu D_{jv} acoperit mult mai mult decît celelalte, astfel încît mulțimea J_v se reduce la un singur element.

Propoziții analoge cu P_1 și P_2 se stabilesc folosind relațiile (11) sau (12), unde M_v devine $\max_j n_{jv}$ (adică max pentru indicii j din Σ_6) respectiv $\max n_{jv}$. Inegalitățile de acest fel se completează cu (13).

Vom considera acum cazul în care $J_v = \{1, 2, \dots, N_v^2\}$ și vom numi acoperirile respective *cvasitotale peste S* :

Mai precis, *acoperirea riemanniană parțial regulat exhaustibilă $(S)_T^V$ va fi cvasitotală în sens strict sau larg, dacă uniform pentru indicii j pentru care $D_{jv} \subset T(V_v)$, avem :*

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{jv}}{n_v} = 1, \quad (15)$$

unde n_v este numărul foilor complete ale V_v peste $T(V_v)$ respectiv

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{jv}}{M_v} = 1, \quad (16)$$

unde $M_v = \max_j n_{jv}$.

Evident o acoperire cvasitotală în sens strict este cvasitotală în sens larg. Suprafețele normale exhaustibile constituie un exemplu de suprafețe cvasitotale în sens strict, dar se pot ușor construi exemple de suprafețe cvasitotale care nu sînt normal exhaustibile (exemplele E_1 și E_2 din [9], I, 3) sau de suprafețe cvasitotale în sens larg care nu sînt cvasitotale în sens strict (exemplul α din II, § 4 al acestei lucrări).

Dacă pentru o acoperire cvasitotală (în sens strict sau larg), începînd de la o anumită etapă a exhaustiunii $T(V_\nu) = T(V)$, vom avea $T(V) = S$ suprafață compactă și vom numi *acoperirea cvasitotală peste S*.

P_3 . O acoperire $(S)_T^V$ cvasitotală strict satisface inegalitatea

$$h \leq 2 \overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \left[\Sigma_s \frac{n_{j\nu}}{n_\nu} (2 - c_{j\nu}^*) + \frac{c_\nu - 2}{n_\nu} \right]. \quad (17)$$

Dacă

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \Sigma_s \left(\frac{n_{j\nu}}{n_\nu} - 1 \right) (2 - c_{j\nu}^*) \leq 0 \quad (18)$$

și notăm cu $c_{0\nu}$ ordinul de conexiune a lui $T(V_\nu)$,

$$h \leq 2 \overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \left(2 - c_{0\nu} + \frac{c_\nu - 2}{n_\nu} \right) \quad (19)$$

Dacă în ipoteza (18), $T(V)$ are ordin de conexiune finit $\tilde{c}_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} c_{0\nu}$, atunci

$$h \leq 2 \left(2 - \tilde{c}_0 + \overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \frac{c_\nu - 2}{n_\nu} \right) \quad (20)$$

P'_3 . Dacă acoperirea $(S)_T^V$ este cvasitotală strict și $T(V) = S$, sau este cvasitotală strict peste S, atunci în ipoteza (18), notînd cu c_0 ordinul de conexiune a lui S presupus finit,

$$h \leq 2 \left(2 - c_0 + \overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \frac{c_\nu - 2}{n_\nu} \right) \quad (21)$$

Pentru inegalitatea (17), folosim faptul că

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{n_{j\nu}''}{n_\nu} = 1$$

și procedăm ca și în cazul (14), plecînd de la inegalitatea (10'). Pentru inegalitatea (19), ținem seama că

$$\Sigma_s (2 - c_{j\nu}^*) = 2 - c_{0\nu}.$$

Din P_3 rezultă următoarele consecințe :

P_4 . Fie acoperirea $(S)_T^V$ cvasitotală strictă. În ipoteza lemei L_1 putem scrie inegalitatea (20) (respectiv (21) pentru $T(V) = S$)

Într-adevăr, în acest caz condiția (18) este îndeplinită, iar $T(V)$ are ordin de conexiune finit.

P_5 . De asemenea, dacă acoperirea $(S)_T^V$ este cvasitotală strictă, dar V are ordin de conexiune finit, atunci este verificată inegalitatea (20), (respectiv (21), pentru $T(V) = S$).

Din ipoteză rezultă succesiv că $N_\nu^1, N_\nu^2, c_{j\nu}$ pentru $D_{j\nu} \subset T(V_\nu)$ și $c_{0\nu}$ sînt mărginite independent de ν , ceea ce implică P_5 .

P₅. În cazul unei acoperiri $(S)_T^V$ cvasitotale în sens strict, cu o infinitate de foi, dar V de ordin finit, avem

$$h \leq 2(2 - \tilde{c}_0) \leq 4. \quad (22)$$

Dacă V este simplu conex, atunci

$$h < 2(2 - \tilde{c}_0), \text{ deci } h \leq 3. \quad (22')$$

În particular, pentru $c = \tilde{c}_0 = 1$, avem

$$h \leq 1, \quad (22'')$$

rezultat care conține teorema discurilor sub forma dată de S. Stoilow [4].

P₆. Rezultatele P₃ — P₅ rămân valabile și dacă presupunem în loc de acoperire cvasitotală strictă o acoperire $(S)_T^V$ cu proprietățile :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{jv}}{M_v} = 1, \quad (23)$$

pentru $M_v = \max_5 n_{jv}$ și uniform pentru indicii j din Σ_5 cu $D_{jv} \subset T(V_v)$, și

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_v'''}{M_v} = 1, \quad (24)$$

și dacă în loc de n_v scriem M_v în toate relațiile (17)—(21).

De asemenea putem înlocui (24) cu condiția

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\max_4 n_{jv} \cdot N_v(\gamma_{uv}) - s_v}{M_v} = 0, \quad (25)$$

folosind limitarea (7) pentru R_v , iar dacă $N_v(\gamma_{uv})$ este mărginit independent de v , atît (23) cît și (25) rezultă din

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{s_{iv}}{M_v} = 1 \quad (26)$$

uniform pentru indicii i cu $\gamma_{iv} \subset T(\text{int } V_v)$.

P₇. Să presupunem că

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{jv}}{M_v} = 1, \quad (27)$$

unde $M_v = \max_6 n_{jv}$, iar limita (27) are loc uniform pentru indicii j din Σ_6 cu $n_{jv} \neq 0$. ($D_{jv} \subset T(V_v)$). Atunci rezultă (23) și deci se aplică P₆.

Se observă de altfel că (27) implică $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\max_5 n_{jv}}{\max_6 n_{jv}} = 1$.

P₈. În ipoteza (27), folosind relația (11), deducem că pentru v suficient de mare

$$h'_v + h''_v \leq 2 \lim_{v \rightarrow \infty} \left[\Sigma_6 \frac{n_{jv}}{M_v} (2 - c_{jv}^*) + \frac{c_v - 2}{M_v} \right]. \quad (28)$$

Dacă

$$\overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \sum_6 \left(\frac{n_{jv}}{M_v} - 1 \right) (2 - c_{jv}^*) \leq 0 \quad (29)$$

atunci,

$$h'_v + h''_v \leq 2 \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \left(2 - c_{0v} + \frac{c_v - 2}{M_v} \right), \quad (30)$$

și adăugînd succesiv ipotezele: $\tilde{c}_0$ finit, și $c_0 = \tilde{c}_0$, obținem

$$h'_v + h''_v \leq 2 \left(2 - \tilde{c}_0 + \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{c_v - 2}{M_v} \right), \quad (31)$$

respectiv

$$h'_v + h''_v \leq 2 \left(2 - c_0 + \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{c_v - 2}{M_v} \right). \quad (32)$$

De asemenea, se formulează propoziții analoge cu $P_4 - P_5$: În ipoteza (27), putem scrie inegalitatea (31) sau (32), îndată ce: 1) N_v^2 este mărginit independent de v și S are gen finit, sau 2) V are ordin de conexiune finit. Dacă în ultimul caz, acoperirea are un număr finit de foi:

$$h'_v + h''_v \leq \text{respectiv} < 2(2 - \tilde{c}_0), \quad (33)$$

după cum $c > 1$ sau $c = 1^1$.

P_9 . Fie $(S)_T^V$ o acoperire cvasitotală în sens larg. Cum (16) implică (27) și deci (23), rezultatele $P_6 - P_8$ se păstrează.

P_{10} . Pentru acoperirile cvasitotale în sens larg, folosind inegalitatea (12) deducem o serie de rezultate analoge cu $P_3 - P_5$, relative la h'_v , dacă v este suficient de mare. Astfel:

$$h'_v \leq 2 \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \left(\sum \frac{n_{jv}}{M_v} (2 - c_{jv}) + \frac{c_v - 2}{M_v} \right). \quad (34)$$

Dacă

$$\overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \sum \left(\frac{n_{jv}}{M_v} - 1 \right) (2 - c_{jv}) \leq 0,$$

atunci

$$h'_v \leq 2 \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \left(2 - c_{0v} + \frac{c_v - 2}{M_v} \right). \quad (35)$$

Dacă $\tilde{c}_0$ este finit, atunci

$$h'_v \leq 2 \left(2 - \tilde{c}_0 + \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{c_v - 2}{M_v} \right), \quad (36)$$

etc.

¹ Evident, relațiile (30)–(33) au loc pentru v suficient de mare.

P₁₁. Să presupunem că avem o numerotare a domeniilor D_{jv} astfel încât j să descrie la fiecare etapă mulțimea J a tuturor indicilor și că există limitele

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{jv}}{M_v} = \alpha_j$$

uniform pentru $j \in J$, iar M_v un anumit număr depinzând de v , de exemplu $\max_s n_{jv}$. Dacă $\inf_J \alpha_j > 0$, atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$, pentru v suficient de mare,

$$\sum_s \alpha_j (h'_{jv} + h''_{jv}) \leq 2 \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_s \frac{n_{jv}}{M_v} (2 - c_{jv}^*) + \frac{c_v - 2 + R_v}{M_v} \right) + \varepsilon \quad (37)$$

Plecînd de la inegalitatea (37) se obțin alte relații analoge cu cele stabilite în propozițiile $P_1 - P_{10}$. Dacă există $\alpha''' = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_v'''}{M_v}$, termenul R_v poate fi înlocuit cu termenul $\alpha''' h_v'''$ în membrul stîng¹.

P₁₂. În toate inegalitățile $P_1 - P_{11}$ stabilite mai sus se poate înlocui $\lim$ din membrul drept cu o $\lim$ oarecare (eventual $\lim$), scriînd inegalitatea respectivă pentru subșirul de indici v corespunzător limitei considerate.

§ 3. Toate propozițiile enunțate în § 2 sînt aplicabile suprafețelor E — cvasinormal exhaustibile [9], caz în care domeniile D_{jv} au o așezare regulată și domeniile de tip $\Delta', \Delta'', \Delta'''$ pot fi alese astfel încît să-și păstreze caracterul, începînd de la o etapă a exhaustiunii, și deci nu numai h ci și h', h'', h''' vor fi independenți de v . Dacă notăm cu $\delta = \{p \in S, p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k, p_k \in \gamma_k\}$ și suprafața $(S)_T^V$ este δ —cvasinormal exhaustibilă², domeniile $\Delta \subset T(V) - \delta$ vor fi domenii Δ' , celelalte domenii Δ cu $\text{fr } \Delta \subset T(V) - \delta$ vor fi Δ'' , iar domeniile Δ pentru care $\text{fr } \Delta \cap \delta \neq \emptyset$ vor fi Δ''' .

Se poate alege o exhaustiune de tipul stabilit în propoziția P_{19} din [9] și anume: D_j fiind componentele conexe ale mulțimii $S - \delta$, curbele γ_v împart S în domenii D_{jv} care formează exhaustiunea lui D_j , și domenii d_{jv} avînd puncte comune cu δ , astfel încît foile lui V_v să se termine pe γ_v dinspre D_{jv} , deci dacă D_{jv} și d_{jv} sînt adiacente $n_{jv} \geq n_{j'v}$, iar pentru v suficient de mare $c_{jv} = c_{j0}$, unde c_{jv} și c_{j0} este respectiv ordinul de conexiune a lui D_{jv} și D_j . Atunci în d_{jv} nu vom avea domenii Δ' sau $\text{fr } \Delta''$ și formula (10') se poate scrie

$$\sum_s n_{jv} (h'_j + h''_j) + n_v''' h_v''' \leq 2 \left[\sum_s n_{jv} (2 - c_{jv}^*) + c_v - 2 \right],$$

unde în Σ_5 din membrul întîi apar efectiv numai domenii D_{jv} .

¹ Pentru inegalitatea (37) e suficient ca îndată ce v este destul de mare: $\frac{n_{jv}}{M_v} > \frac{\alpha_j}{1 + \varepsilon_1}$, pentru $\varepsilon_1 > 0$ arbitrar.

² Conform propoziției P_{16} din [9], o suprafață E — cvasinormal exhaustibilă este totdeauna δ — cvasinormal exhaustibilă.

În particular, pentru suprafețele E — cvasinormal exhaustibile este aplicabilă propoziția P_{11} , introducând (dacă J este o mulțime infinită) la fiecare etapă domenii D_{jv} prin noi curbe auxiliare în afară de curbele $T(\Gamma_v)$.

Vom dezvolta ca un exemplu cazul suprafețelor E — cvasinormal exhaustibile în sensul lui $T. Kuroda$ [13], luînd S — sfera, D_{1v} — domeniul de exhaustiune a lui $S - E$, $n_{jv} \leq n_{1v}$ pentru $j \geq 2$ (conform P_7 din lucrarea [8]), $c_{1v} = N_v^1$ și $c_{jv} = 1$ pentru $j \geq 2$.

Dacă un domeniu Δ'' include D_{1v} , oricare ar fi v , atunci există un singur domeniu Δ'' . Notînd cu D_{2v} domeniul care cuprinde fr Δ'' , Σ_5 se reduce numai la termenul $j = 2$, $h'_{jv} = 0$ pentru $j \neq 2$ și $h''' = 0$, astfel încît (10) devine

$$n_{2v}(h'_{2v} + 1) \leq 2(n_{2v} + c_v - 2),$$

de unde

$$h'_{2v} \leq 1 + 2 \frac{c_v - 2}{n_{2v}}$$

sau

$$h' \leq 1 + 2 \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{c_v - 2}{n_{2v}} \quad (38)$$

(și $h'' = 1$, $h''' = 0$).

Dacă nici un domeniu Δ'' nu include D_{1v} , atunci

$$\begin{aligned} n_{1v}(h'_{1v} + h''_{1v}) + \sum_{j \geq 2} n_{jv}h'_{jv} + n''_{1v}h''' \leq 2[n_{1v}(2 - c_{1v}^*) + \\ + \sum_{j \geq 2} n_{jv} + c_v - 2] \leq 2(2n_{1v} + c_v - 2), \end{aligned} \quad (39)$$

de unde se deduce imediat

$$h'_1 + h''_1 \leq 2 \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \left(2 - c_{0v} + \frac{c_v - 2}{n_{1v}} \right). \quad (40)$$

Dacă $T(V)$ are ordin de conexiune finit,

$$h'_1 + h''_1 \leq 2 \left(2 - \tilde{c}_0 + \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{c_v - 2}{n_{1v}} \right) \quad (41)$$

și în orice caz

$$h'_1 + h''_1 \leq 4 + 2 \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{c_v - 2}{n_{1v}}, \quad (42)$$

relație care generalizează aceeași formulă stabilită în lucrarea [8] pentru suprafețe E — cvasinormal exhaustibile cu mulțimea E total discontinuă.

În cazul acoperirilor cvasitotale în sens strict :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{1v}}{n_v} = 1,$$

avem

$$h \leq 2 \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \left(2 - c_{0v} + \frac{c_v - 2}{n_{1v}} \right), \quad (43)$$

respectiv

$$h \leq 2 \left(2 - \tilde{c}_0 + \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{c_v - 2}{n_{1v}} \right), \quad (44)$$

și întotdeauna

$$h \leq 4 + 2 \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{c_v - 2}{n_{1v}}, \quad (45)$$

iar în cazul acoperirilor cvasitotale în sens larg :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{jv}}{n_{1v}} = 1$$

uniform în raport cu j , obținem pentru $h' + h''$ majorarea dată de membrul drept din (43), (44) respectiv (45).

Formulele (43)–(44) generalizează rezultatele obținute pentru suprafețele normal exhaustibile [6].

De asemeni presupunînd $\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^{n_{jv}} \frac{n_{jv}}{n_{1v}} = 0$ și ordinul de conexiune c_1 al domeniului $D_1 = S - E$ finit, rezultă

$$h'_1 + h''_1 \leq 2 \left(2 - c_1^* + \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{c_v - 2}{n_{1v}} \right) \quad (46)$$

unde $h''_1 \leq \mu''_1$.

Vom introduce acum ipoteza V simplu conex cînd există o singură curbă γ_v și două domenii D_{1v} și D_{2v} cu $c_{1v} = c_{2v} = 1$. Fie de exemplu $n_{1v} \geq n_{2v}$. Deoarece am presupus $\Delta \subset T(V)$, prezența unui domeniu Δ'' sau Δ''' implică $T(V) = \bar{S}$.

Dacă există un domeniu Δ'' , atunci $h = h'' = 1$.

Într-adevăr, $h''_{jv} = 1$, pentru unul dintre indicii $j = 1$ sau 2 , implică $h = h'_{jv} + 1$ și (10') sau (39) devine

$$h'_{jv} \leq 1 - \frac{2}{n_{jv}},$$

prin urmare $h'_{jv} = 0$.

Dacă $h'' = 0$, atunci $h' \leq 3$.

Inegalitatea (39) ne dă

$$n_{1v} h'_1 + n_{2v} (h'_2 + h''') \leq 2(n_{1v} + n_{2v} - 1), \quad (47)$$

iar (13) implică

$$h'_j \leq 2 + 2 \min_q \frac{c_{jqv} - 2}{n_{jqv}}. \quad (48)$$

Să observăm că din $c_v = 1$ rezultă $c_{jqv} = 1$ pentru cel puțin un q și un anumit $j = 1$ sau 2 . Deci (48) ne dă $h'_j \leq 1$.

Dacă $j = 2$, după cum $h'_2 = 1$ sau 0 , din relația (47) deducem $h'_1 \leq 2$ sau 3 .

Fie $j = 1$. Dacă $h'_1 = 1$, există un domeniu d_{2qv} peste D_{2v} cu $c_{2qv} = 1$ curbe frontieră separînd din V_v domenii simplu conexe de pe D_{1v} . Cum aceste domenii sînt complet ramificate, fiecare din cele $c_{2qv} - 1$ curbe acopăr γ_v de cel puțin două ori. Prin urmare

$$n_{2qv} \geq 2c_{2qv} - 1$$

și (48) implică $h'_2 \leq 2$. Dacă $h'_1 = 0$, cum $c_{2qv} \leq n_{2qv}$, din (48) rezultă $h'_2 \leq 3^1$.

În general, dacă $n_{2v} \neq 0$ din relația (47) deducem

$$h \leq 2 \left(1 + \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{1v} - 1}{n_{2v}} \right), \quad (49)$$

prin urmare în cazul acoperirilor cvasitotale peste sferă

$$h \leq 3.$$

Dacă $n_{2v} = 0$, suprafața e normal exhaustibilă și obținem $h = h' \leq 1$. Aceste rezultate cuprind ca un caz particular teorema discurilor pentru suprafețele A_∞ ale lui L. I. Volkovîski [7], [14] și teorema discurilor dată de prof. S. Stoilow pentru suprafețele normal exhaustibile simplu conexe [4].

§ 4. În considerațiile de mai sus am admis ipoteza $\Delta \subset T(V)$, care se justifică în modul următor:

Dacă mulțimea lacunară cuprinde un continuu K , putem lua o infinitate de discuri disjuncte două câte două, care intersectează K . Prin definiție, ele vor fi complet ramificate, deoarece nu sînt acoperite complet de nici o foaie. Problema numărului domeniilor complet ramificate nu mai are sens sub această formă.

Singurul caz important, care apare atunci cînd înlăturăm ipoteza $\Delta \subset T(V)$, constă în considerarea de domenii Δ'' sau Δ''' , cu frontiera în $T(V_v) - \gamma_v$, respectiv în $T(V_v)$ dar intersectînd γ_v , astfel încît fiecare să includă o componentă conexă Q a mulțimii $S - T(V)$, și pe care le vom nota $\tilde{\Delta}_t''$ și $\tilde{\Delta}_u'''$ ($t = 1, \dots, h_v''$ $u = 1, \dots, h_v'''$). În acest mod se obțin date

¹ Se verifică din (47) ca atît $h'_1 = 3$ cît și $h'_1 = 2$, $h'_2 = 1$ implică $h''' = 0$.

asupra numărului de componente conexe ale mulțimii lacunare sau numărului de valori lacunare.

Dacă există un domeniu $\Delta \supset T(V)$, el va fi de tip Δ'' , dar inegalitatea (3) nu mai este valabilă pentru că $c_i^* = 1$ nu mai implică $n_i^* \neq 0$. Atunci $h = 1$, dar această relație exprimă doar faptul că pe S mulțimea lacunară are puncte interioare și că $T(V)$ poate fi inclus într-un domeniu jordanian pe S .

Înlăturînd acest caz, formulele (2)—(4) și (9) rămîn valabile și fără condiția $\Delta \subset T(V)$, dar (3) și (4) pot fi precizate în legătură cu considerarea domeniilor $\tilde{\Delta}_i''$ și $\tilde{\Delta}_u'''$:

Aplicînd raționamentul de la punctul 2), § 1, unui domeniu $\tilde{\Delta}_i''$ care include un domeniu D_j lacunar (cu $n_j = 0$) și observînd că în acest caz nu există $\tilde{\delta}_i''$ simplu conex, formula (3) devine

$$\Sigma \tilde{r}_i'' \leq \tilde{\Sigma}_1 n_j (2 - c_j) + \tilde{\Sigma}_2 n_j (\tilde{h}_j'' - \tilde{\mu}_j'') \quad (3)$$

unde $\tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2, \tilde{h}_j'', \tilde{\mu}_j''$ au semnificație analogă cu mărimile respective din (3), iar $\tilde{h}_j'' \leq \tilde{\mu}_j''$.

De asemenea pentru un domeniu $\tilde{\Delta}_u'''$ se obține o formulă (4), dar în raționamentul efectuat spre a deduce (9) putem face ca Δ_{ujp}^* corespunzător lui Δ_u^0 să includă o componentă lacunară, astfel încît N și s să nu aducă contribuție pentru acest Δ_{ujp}^* și să avem

$$\tilde{R} \leq - \sum_1 \tilde{h}_v''' n_v^0. \quad (9)$$

Inegalitatea fundamentală (10) devine

$$\tilde{\Sigma}_5 n_j (\hat{h}_j + h_j'' + 2\tilde{h}_j'' + 2\hat{h}_j''') + n''' h''' \leq 2 [\tilde{\Sigma}_5 n_j (2 - c_j^*) + (c - 2)] \quad (10)$$

unde $c_j^* = c_j - \mu_j'' - \mu_j''' - \tilde{\mu}_j'' - \tilde{\mu}_j'''$, $\hat{h}_j$ este numărul domeniilor $\tilde{\Delta}_u'''$ pentru care $\Delta_u^0 \subset D_j$, iar $\tilde{\Sigma}_5$ este extinsă la domenii D_j care nu sînt incluse în domenii Δ . Se observă că domeniile $\tilde{\Delta}$ contribuie în sumă cu indicele 2. Dacă $\tilde{\Delta}$ conține fiecare o singură componentă lacunară, atunci $\tilde{h}_j'' = \tilde{\mu}_j''$ și $\hat{h}_j''' = \tilde{\mu}_j'''$, iar (10) coincide cu (10'), dar formula (10) pune în evidență semnificația domeniilor sau valorilor lacunare și faptul că un asemenea domeniu sau valoare scade cu 2 numărul celorlalte discuri complet ramificate. Considerînd numai domenii Δ' , Δ'' și $\tilde{\Delta}''$ se obține o formulă (11).

Cu inegalitatea (10) sau (11) se pot stabili propoziții de tipul celor din §§ 2 sau 3 și în particular se generalizează formula demonstrată în lucrarea [8] pentru ramificarea suprafețelor E — cvasinormal exhaustibile în sensul lui T. Kuroda, cu E mulțime lacunară.

¹ Ca și în § 1 suprimăm indicele v din considerațiile ce urmează.

II. Criterii de regulat exhaustibilitate

§ 1. Pentru a putea aplica suprafețelor riemanniene parțial regulat exhaustibile rezultatele metodei metrico-topologice ale lui L. V. Ahlfors, vom stabili în cele ce urmează condiții în care aceste suprafețe sînt regulat exhaustibile, adică admit un șir de exhaustiune prin domenii poliedrice astfel încît la limită raportul dintre lungimea frontierei relative și numărul mediu al foilor acoperirii corespunzătoare unui domeniu din șirul de exhaustiune să tindă la zero.

Fie S o suprafață înzestrată cu o metrică normală ([3] sau [2], p. 311) și $(S)_T^V$ o suprafață riemanniană parțial regulat exhaustibilă. Să notăm cu $\{V_v\}$ un șir de exhaustiune a lui V , format din domenii poliedrice V_v ce acopăr parțial regulat S în raport cu N_v^1 , curbe γ_{iv} , pe care se proiectează

frontiera Γ_v a lui V_v , ($\gamma_v = \bigcup_{i=1}^{N_v^1} \gamma_{iv}$), și care descompun S în N_v^2 domenii D_{jv} .

Fie L_{iv} lungimea curbei γ_{iv} , A_{jv} aria domeniului D_{jv} măsurată cu aria lui S ca unitate și n_{jv} respectiv s_{iv} numărul foilor lui V_v pe D_{jv} și γ_{iv} .

Teoremă. *Condiția necesară și suficientă ca un subșir din șirul V_v de exhaustiune parțial regulată al suprafeței $(S)_T^V$ să fie șir de exhaustiune regulată este*

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\sum_i [(n'_{i'v} - s_{iv}) + (n''_{i''v} - s_{iv})] L_{iv}}{\sum_j n_{jv} A_{jv}} = 0, \quad (50)$$

unde pentru fiecare i am notat cu $D_{j'v}$ și $D_{j''v}$ cele două domenii din $S - \gamma_v$ separate de γ_{iv} .

Într-adevăr, pentru acoperirea $(S)_T^{\text{int}} V_v$ avem lungimea frontierei relative

$$L_v = \sum_i [(n'_{i'v} - s_{iv}) + (n''_{i''v} - s_{iv})] L_{iv},$$

iar numărul mediu al foilor

$$A_v = \sum_j n_{jv} A_{jv}.$$

Un caz deosebit de important, deoarece am demonstrat că se poate întotdeauna realiza pentru suprafețele E — cvasinormal exhaustibile (P_{19} , [9]), este acel în care pentru orice v , la fiecare γ_{iv} se opresc foi numai dintr-o singură parte, $D_{j'v}$ de exemplu. Atunci

$$(n'_{i'v} - s_{iv}) + (n''_{i''v} - s_{iv}) = n'_{i'v} - n_{i'v},$$

ceea ce simplifică expresia (50). În particular pentru suprafețele E — cvasinormal exhaustibile în sensul lui T. Kuroda, criteriul de mai sus se reduce la rezultatul pe care l-am stabilit anterior ([8], formula (6)).

Evident,

$$0 \leq s_{iv} \leq \min(n_{j'_i v}, n_{j''_i v})$$

și

$$|n_{j'_i v} - n_{j''_i v}| \leq (n_{j'_i v} - s_{iv}) + (n_{j''_i v} - s_{iv}) \leq n_{j'_i v} + n_{j''_i v} \quad (51)$$

În cazul cînd S este de gen 0, sau cînd S este arbitrar însă exhaustiunea are proprietatea din propoziția P_{19} , [9], ipoteza $s_{iv} = 0$ implică $\min(n_{j'_i v}, n_{j''_i v}) = 0$. Atunci ultima inegalitate (51) se poate înlocui cu următoarea

$$(n_{j'_i v} - s_{iv}) + (n_{j''_i v} - s_{iv}) \leq |n_{j'_i v} - 1| + |n_{j''_i v} - 1| \quad (51')$$

Folosind relațiile (51) sau (51') se deduc din (50) criterii necesare respectiv suficiente de regulat exhaustibilitate prin șirul V_v .

§ 2. Din aceeași teoremă se obțin, introducînd ipoteze metrice asupra mulțimii $\mathcal{S}$, diferite propoziții care completează rezultatele din lucrarea [8].

P_{13} . *O suprafață parțial regulat exhaustibilă cu mulțimea $\mathcal{S}$ de lungime nulă este totdeauna regulat exhaustibilă.*

Într-adevăr, după P_{17} , [9] suprafața este $\mathcal{S}$ — cvasinormal exhaustibilă și se aplică T_6 , [8]. Propoziția P_8 , [8] stabilește pentru suprafețele E — cvasinormal exhaustibile în sensul lui T. Kuroda o condiție în care ipoteza $\mathcal{S}$ de lungime nulă nu este numai suficientă ci și necesară. Acest rezultat este extins prin P_{17} de mai jos. El se aplică în particular suprafețelor normal exhaustibile, dar în acest caz enunțul se poate preciza, după cum urmează :

P_{14} . *Suprafețele riemanniene care admit o mulțime lacunară E de lungime pozitivă nu sînt regulat exhaustibile.*

Fie $\mathcal{O}_v$ o exhaustiune arbitrară a suprafeței considerate și să notăm cu $\mathcal{O}_{kv}$, ($k = 1, \dots, \mathcal{N}_v$) foile lui $(S)_T^{\text{int}} \mathcal{O}_v$, cu $\mathcal{A}_{kv}$ aria lui $\mathcal{O}_{kv}$ măsurată cu aria lui S ca unitate și cu $\mathcal{L}_{kv}$ frontiera relativă a lui $\mathcal{O}_{kv}$.

Fie $\mathcal{N}_v$ numărul foilor $\mathcal{O}_{kv}$ pentru care $\mathcal{A}_{kv} \geq \frac{1}{2}$, și $\mathcal{N}_v - \mathcal{N}'_v = \mathcal{N}''_v$ numărul celorlalte foi.

După lema I a lui Ahlfors există constanta $k'' > 0$ depinzînd numai de S , astfel încît pentru foile din categoria a doua

$$\mathcal{A}_{kv} \leq k'' \mathcal{L}_{kv} \quad (52)$$

Pe de altă parte pentru foile din prima categorie, există o constantă k' depinzînd numai de S și de E , astfel încît

$$\mathcal{L}_{kv} \geq k'. \quad (53)$$

Într-adevăr, dacă pe suprafața S de metrică suficient de regulată, normală, de arie finită (în particular pe sferă), avem o mulțime E de lungime pozitivă, oricare ar fi domeniul poliedric D limitat de n curbe jordanene C_i , situat în $S - E$ și de arie $\geq a > 0$, există o constantă $h'(S, E, a) > 0$ astfel încît lungimea lui $C = \bigcup_1^n C_i$ să fie $\geq h'$.

Cum numărul mediu al foilor lui $\mathcal{O}_v$ este $\mathcal{A}_v = \sum \mathcal{A}_{kv}$, iar frontiera relativă $\mathcal{L}_v = \sum \mathcal{L}_{kv}$, folosind (52) și (53) și notînd $\Sigma'' \mathcal{A}_{kv}$ suma referitoare la foi $\mathcal{O}_{kv}$ din a doua categorie, obținem

$$\frac{\mathcal{L}_v}{\mathcal{A}_v} \geq - \frac{h' \mathcal{N}'_v + \frac{1}{h''} \Sigma'' \mathcal{A}_{kv}}{\mathcal{N}'_v + \Sigma'' \mathcal{A}_{kv}} \geq \min \left(h', \frac{1}{h''} \right) = h > 0$$

deci suprafața nu este regulat exhaustibilă.

Consecința 1. Condiția necesară și suficientă ca o suprafață normal exhaustibilă să fie regulat exhaustibilă este ca mulțimea lacunară să fie nulă.

P_{15} . Fie $(S)_T^V$ o suprafață parțial regulat exhaustibilă, cu mulțimea $\mathcal{S}$ de lungime finită sau $\sum_{i=1}^{N_v^1} L_{iv} < M$ pentru orice v . Dacă pentru o anumită mulțime J_v de indici j este îndeplinită una din următoarele două condiții:

$$\begin{aligned} \text{a) } \inf_v \sum_{j \in J_v} A_{jv} > 0 \text{ și } \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\max_{j \in J_v} (n_{jv} - s_{iv})}{\min_{j \in J_v} n_{jv}} &= 0, \\ \text{b) } \inf_{j \in J_{v_v}} A_{jv} > 0 \text{ și } \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\max_{j \in J_v} (n_{jv} - s_{iv})}{\sum_{j \in J_v} n_{jv}} &= 0, \end{aligned} \quad (54)^1$$

atunci $(S)_T^V$ este regulat exhaustibilă.

P_{15} rezultă din teorema generală de mai sus. Pentru suprafețe E — cvasi-normal exhaustibile în sensul lui T. Kuroda se obține în ipoteza a) aplicată unei mulțimi $J_v = \{1\}$, dacă D_{1v} este domeniul de exhaustiune a lui $S - E$, propoziția T_7 din [8].

P_{16} . O condiție necesară respectiv suficientă pentru ca șirul V_v să conțină un subșir de exhaustiune regulată este evident ca

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\min (n_{jv} - s_{iv})}{\max n_{jv}} \sum_{j \in J_v} L_{iv} = 0 \text{ sau } \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\max (n_{jv} - s_{iv})}{\min n_{jv}} \sum_{j \in J_v} L_{iv} = 0$$

§ 3. Vom indica în acest paragraf cîteva criterii de regulat exhaustibilitate pentru anumite clase de suprafețe riemanniene considerate în partea I, §§ 2 și 3.

P_{17} . Fie $(S)_T^V$ o suprafață parțial regulat exhaustibilă, pentru care există mulțimea de indici J_v și numărul M_v astfel încît

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{jv}}{M_v} = 1$$

¹ În diferența $n_{jv} - s_{iv}$ indicele j va lua valorile j' și j'' din formula (50)

uniform pentru $j \in J_v$ și astfel încît notînd cu $M_v^* = \max_{j \in J_v} n_{jv}$ pentru indicii $j \notin J_v$,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{M_v^*}{M_v} < 1 \quad (56)$$

Vom însemna cu $\Sigma'_i, \Sigma''_i, \Sigma'''_i$ sumele $\Sigma_i L_{iv}$ relative la indicii i pentru care γ_{iv} sînt pe frontiera reuniunii domeniilor D_{jv} , $j \in J_v$, în interiorul acestei reuniuni, respectiv în restul lui S .

Condiția $\Sigma'_i L_{iv} \rightarrow 0$ este necesară pentru regulat exhaustibilitatea suprafeței prin șirul V_v ¹.

Dacă $\inf_v \Sigma_{j \in J_v} A_{jv} > 0$, $\Sigma''_i L_{iv} + \Sigma'''_i L_{iv}$ (sau ceea ce este echivalent, $\Sigma_i L_{iv}$) este mărginită independent de v , și în loc de (56) avem

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{M_v^*}{M_v} = 0, \quad (57)$$

atunci condiția $\Sigma'_i L_{iv} \rightarrow 0$ este și suficientă.

Evident, $\Sigma_i L_{iv} < M$ se poate înlocui cu $\Sigma''_i \theta_{iv} L_{iv} + \Sigma'''_i \theta_{iv} L_{iv} \rightarrow 0$,

$$\text{unde } \theta_{iv} = \frac{(n_{j_i'v} - s_{iv}) + (n_{j_i''v} - s_{iv})}{M_v}.$$

P₁₈. Fie $(S)_T^V$ o suprafață cvasitotal exhaustibilă în sens strict.

Vom nota Σ'_i respectiv Σ''_i sumele relative la indicii i pentru care $\gamma_{iv} \subset \text{fr } T(V_v)$ sau $\gamma_{iv} \subset \text{int } T(V_v)$.

Condiția $\Sigma'_i L_{iv} \rightarrow 0$ este necesară pentru regulat exhaustibilitate prin șirul V_v , iar dacă $\Sigma''_i L_{iv}$ (sau ceea ce este echivalent $\Sigma_i L_{iv}$) este mărginită, această condiție este și suficientă.

Ca și în propoziția precedentă, $\Sigma''_i L_{iv} < M$ se poate înlocui cu $\Sigma''_i \theta_{iv} L_{iv} \rightarrow 0$, unde $M_v = n_v$. Dacă $\Sigma'_i L_{iv} \rightarrow 0$ (în particular, dacă $S = T(V_v)$, deci $\Sigma'_i L_{iv} = 0$), $\Sigma''_i \theta_{iv} L_{iv} \rightarrow 0$ este o condiție necesară și suficientă.

Consecința 2. O suprafață cvasitotal exhaustibilă în sens strict peste S (adică pentru care $T(V_v) = S$, dacă v este suficient de mare), este regulat exhaustibilă, dacă $\Sigma_i L_{iv} < M$, independent de v .

Rezultate analoge se formulează pentru suprafețe cvasitotal exhaustibile în sens larg adăugînd condiția (26), care este evident satisfăcută pentru exhaustiuni cu proprietatea P₁₉, [9].

¹ Pentru suprafețe E-cvasinormal exhaustibile în sensul lui T. Kuroda $\Sigma'_i = \Sigma_i$, deci această condiție este și suficientă (P₈[8], P₁₈).

Din propozițiile de mai sus obținem :

Consecința 3. Fie $(S)_T^V$ o suprafață E -cvasinormal exhaustibilă în sensul lui T. Kuroda, V_v un șir de exhaustiune cu proprietatea P_{19} [9], D_{1v}

domeniul de exhaustiune a lui $S - E$, $M_v = \max_{j \neq 1} n_{jv} = n_{1v}$, $M^* = \max_{j \neq 1} n_{jv}$, $\tilde{M}_v = \min_{j \neq 1} n_{jv}$. Pentru ca șirul V_v să fie șir de regulat exhaustibilitate este necesar ca

$$\sum_i L_{iv} \rightarrow 0, \text{ dacă } \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{M_v^*}{M_v} < 1, (P_8, [8] \text{ și } P_{17}), \text{ și}$$

$$\frac{M_v - M_v^*}{M_v} \sum_i L_{iv} \rightarrow 0, \text{ dacă } \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{M_v^*}{M_v} = 1, (P_{16})$$

și este suficient ca

$$\sum_i L_{iv} \rightarrow 0, \text{ dacă } \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\tilde{M}_v}{M_v} < 1 \text{ și în general, } (P_{13}), \text{ și}$$

$$\frac{M_v - \tilde{M}_v}{M_v} \sum_i L_{iv} \rightarrow 0, \text{ dacă } \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\tilde{M}_v}{M_v} = 1,^1 (P_{16} \text{ și } P_{15}, a)).$$

4. Vom încheia această lucrare printr-o comparație între cele două metode : topologică și metrico-topologică.

Se știe că metoda topologică dă rezultate mai exacte asupra ramificării acoperirilor riemanniene *simply conexe* : normal exhaustibile (teorema discurilor a prof. S. Stoilow [4]), suprafețe A_∞ sau E — cvasinormal exhaustibile în sensul lui T. Kuroda cu mulțimea E total discontinuă ([7], [8]). Acest fapt se oglindește și în rezultatele stabilite în lucrarea de față, pentru suprafețe parțial regulat exhaustibile *simply conexe* : prima metodă dă cel mult 3 discuri complet ramificate de tipul Δ' și Δ'' (§ 3, exemplu : V —*simply conex*) și în cazul cvasitotal $h \leq 3$ (același exemplu sau § 2, P'_5 , (22')), în timp ce a doua metodă stabilește pentru regulat exhaustibilitate cel mult 4 discuri complet ramificate.

Dimpotrivă, dacă ordinul de conexiune a lui V este cel puțin 2, rezultatele celor două metode pentru suprafețele cvasitotal respectiv regulat exhaustibile sînt analoge.

Într-adevăr, din inegalitatea (B) a lui Ahlfors generalizată ([12], p. 307, (6)), se deduce imediat teorema discurilor sub forma următoare :

Dacă V_v este un șir de exhaustiune a suprafeței $(S)_T^V$ și pe S considerăm h discuri disjuncte două câte două Δ_i , presupunînd că toate insulele *simply conexe* de pe Δ_i au multiplicitatea $\geq \mu_i$, atunci

$$\sum_{i=1}^h \left(1 - \frac{1}{\mu_i} \right) \leq 2 - c_0 + \frac{(c_v - 2)}{A_v} + \frac{\tilde{L}_v}{A_v}, \quad (58)$$

¹ În acest caz, suprafața este cvasitotal exhaustibilă în sens larg.

unde $c_0 - 2 = \rho(S)$ este caracteristica lui S , $c_v - 2 = \rho(V_v)$ caracteristica lui V_v , $\rho^+ = \max(\rho, 0)$, L_v este frontiera relativă, A_v numărul mediu al foilor lui V_v pe S , iar $\tilde{h}$ o constantă ce nu depinde de exhaustiune.

Pentru suprafețe regulat exhaustibile, din (58) rezultă¹

$$\sum_{i=1}^h \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) \leq 2 - c_0 + \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{(c_v - 2)^+}{A_v} \quad (59)$$

și cum $\mu_i \geq 2$, deducem

$$h \leq 2 \left(2 - c_0 + \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{(c_v - 2)^+}{A_v}\right). \quad (60)$$

Or, în cazul cvasitotal exhaustibil am stabilit inegalitatea analogă

$$h \leq 2 \left[2 - c_0 + \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{c_v - 2}{M_v}\right] \quad (21)$$

în propozițiile P_3 , P_6 , P_7 , unde $M_v = n_v$, $\max_5 n_{jv}$ respectiv $\max_6 n_{jv}$, $T(V) = S^2$, iar

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{A_v}{M_v} = 1.$$

O formulă analogă am obținut pentru suprafețele E —cvasinormal exhaustibile în sensul lui T . Kuroda (cu mulțimea E —total discontinuă, [8], T_5 , și în general I , § 3, formula (41) în care pentru $T(V) = S$ înlocuim c_0 cu c_0).

Remarcăm că *suprafețele cvasitotal exhaustibile, care apar ca un analog topologic al celor regulat exhaustibile, nu sînt un caz particular al acestora.*

α . Un exemplu se obține plecînd de la suprafața considerată în lucrarea [9], $(I, 3, E_2)$ luînd $r < \infty$, $a^v = a$, $b^v = b$, $a_v = c$, $b_v = d$ și extrăgînd de pe fiecare foaie un segment. Fie în $|w| > r$ un pătrat cu latura 1. Vom extrage de pe prima foaie baza pătratului, de pe foaia n segmentul din pătrat paralel cu baza și situat la distanța $\frac{n-1}{n}$ de ea.

Suprafața este cvasitotal exhaustibilă în sens larg, dar nu este regulat exhaustibilă, deoarece pentru a trece de pe foaia k pe foaia $k+2$ trebuie ocolite punctele de ramificare astfel încît în orice exhaustiune, orice foaie exceptînd eventual ultima va conține un continuu de diametru mai mare decît o constantă pozitivă și nu va conține un segment, prin urmare va avea lungimea frontierei mai mare decît un număr pozitiv fixat.

1 Inegalitatea (59) este valabilă dacă $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{L_v}{A_v} = 0$; dacă $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{L_v}{A_v} = 0$, atunci putem înlocui în (59) $\overline{\lim}$ cu $\lim$.

2 Evident în ambele inegalități (60) și (21) se poate înlocui c_0 cu $\tilde{c}_0$ ordinul de conexiune a lui $T(V)$.

β. Un alt exemplu se obține plecând de la suprafețe de tipul E_1 din I, 3, [9]. Fie S sfera de arie 1 și în plan un pătrat P cu centrul 0 și laturi paralele cu axele, de lungime (plană) c suficient de mare pentru ca aria sferică a lui P să fie $> \frac{3}{4}$. Vom numi tăieturi de rang k ($k = 1, 2, \dots$) sistemul format din T_k segmente din P paralele cu axa imaginară de lungime c , situate astfel încît distanța dintre ele să fie egală cu $\frac{c}{T_k}$, iar distanța dintre laturile verticale ale lui P și prima respectiv ultima tăietură să fie $\frac{c}{2T_k}$. Vom lua $T_1 = 2$ și $T_{k+1} = 4T_k = 2^{2k-1}$. Aceste tăieturi descompun P în $T_k + 1$ dreptunghiuri R_{jk} ($j = 0, 1, \dots, T_k$). Formăm următoarea suprafață riemanniană: fie S_k o sferă S prevăzută cu tăieturile de rang $k - 1$ și k , ($k = 2, 3, \dots$) și S_1 o sferă S prevăzută cu tăieturile de rang 1. Lipim S_k cu S_{k-1} în lungul tăieturilor de rang $k - 1$ ($k = 2, 3, \dots$), astfel încît extremitățile tăieturilor să fie puncte de ramificare de ordinul 1.

Această suprafață este cvasitotal exhaustibilă în sens strict, după cum se vede, luînd de exemplu pe S_k imaginile corespunzătoare la T_{k-1} curbe jordanice din plan de lungime $2(c + \varepsilon_k)$, mărginind fiecare un domeniu de arie a_k , care include o tăietură de rang $k - 1$, dar lasă în exterior tăieturile de rang k , unde ε_k și a_k tind la zero o dată cu $\frac{1}{k}$. Exhaustiunea prin domeniile poliedrice V_k formate din $k - 1$ foi complete și domeniile jordanice construite mai sus pe S_k este cvasitotală strict.

Suprafața nu este însă regulat exhaustibilă. Într-adevăr, fie $\mathcal{W}_v$ o exhaustiune oarecare, cu frontiera formată din curbe jordanice analitice, $\mathcal{A}(\mathcal{W}_v)$ numărul foilor și $\mathcal{L}(\mathcal{W}_v)$ frontiera relativă. Suprimînd pentru simplificarea scrierii indicele v , vom nota cu $W_k = \mathcal{W}_v \cap S_k$, cu $\mathcal{C}_k$ frontiera relativă de pe W_k , de lungime $\mathcal{L}_k$ și cu $\mathcal{A}_k$ aria. Vom distinge două posibilități: foi W'_k cu $\mathcal{A}_k > \frac{1}{2}$ și foi W''_k cu $\mathcal{A}_k \leq \frac{1}{2}$.

După lema I a lui Ahlfors

$$\mathcal{L}_k > h \mathcal{A}_k'', \quad (61)$$

unde h este constantă pozitivă depinzînd de S .

Fie $K_v = \max k$, pentru care $W_k \neq \emptyset$ și $k_v = \max k$, pentru care $\mathcal{A}_k > \frac{1}{2}$. Vom arăta că

$$\sum_{k_v}^{K_v} \mathcal{L}_k \geq \frac{1}{c} T_{k_v-1} \quad (62)$$

1 Putem presupune $k_v \geq 2$, luînd v suficient de mare.

Prin ipoteză, $\mathcal{A}(W_{k_v} \cap P) > \frac{1}{4}$ și notînd cu a_{jk_v} lungimea maximă a intersecției σ_{jk_v} a unei drepte $x = \text{const.}$ cu $W_{k_v} \cap R_{jk_v-1}$, avem $\mathcal{A}(W_{k_v} \cap P) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{c}{T_{k_v-1}} \cdot \sum_0^{T_{k_v-1}} a_{jk_v}$. Mulțimea $\bigcup_{k_v} \sigma_{jk_v}$ va fi pusă în corespondență biunivocă cu un număr finit de arce din $\bigcup_{k_v} \mathcal{E}_k$, în modul următor: Ur-mărim plecînd din $z_0 \in \sigma_{jk_v}$ într-o direcție convenabil aleasă dreapta $y = y_0$. Ea va intersecta $\mathcal{E}_{k_v}$ sau va traversa o tăietură de rang k_v , apoi va întîlni $\mathcal{E}_{k_v+1}$ sau va traversa o tăietură de rang $k_v + 1$ și așa mai departe pînă cînd pe o foaie $k \leq K_v$ va intersecta $\mathcal{E}_k$ în punctul $\tilde{z}_0$. Asociem z_0 cu $\tilde{z}_0$. Se vede astfel că

$$\sum_0^{T_{k_v-1}} a_{jk_v} \leq \sum_{k_v}^{K_v} \mathcal{L}_k$$

Inegalitățile stabilite demonstrează (62). Dar (61) și (62) arată că, pentru v suficient de mare,

$$2 \frac{\mathcal{L}(\mathcal{W}_v)}{\mathcal{A}(\mathcal{W}_v)} \geq \frac{\sum_{k_v}^{K_v} \mathcal{L}_k + \sum \mathcal{L}_k''}{k_v + \sum \mathcal{A}_k''} > h,$$

fiindcă $\frac{T_{k_v-1}}{c k_v} \rightarrow \infty$. Exhaustiunea arbitrar luată $\mathcal{W}_v$ nu este deci regulată.

Remarcăm că noțiunea de suprafață cvasitotal exhaustibilă nu este legată de acoperirile parțial regulate, ci poate fi definită în general, pentru exhaustiuni prin domenii poliedrice oarecare, ceea ce va forma obiectul unei lucrări ulterioare.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Nevanlinna: *Eindeutige analytische Funktionen*, J. Springer, Berlin, 1936 sau 1954
2. S. Stoilow: *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, vol. II, Ed. Acad. R.P.R., 1958.
3. L. V. Ahlfors: *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, Acta Math., 1935, t. 65, p. 157—195.
4. S. Stoilow: *Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces*, Compositio Math., 1940, t. 7, 3, p. 428—435.
5. K. Noshiro: *Cluster sets*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
6. C. Andreian: *Teorema discurilor pentru suprafețe riemanniene normal exhaustibile*, Bul. științ. Acad. R.P.R., Secț. mat.-fiz., 1952, t. IV, 2, p. 263—272.
7. C. Andreian Cazacu: *Legături între suprafețele normal exhaustibile și suprafețele A_∞* , Bul. științ. Acad. R.P.R., Secț. mat.-fiz., 1955, t. VII, 3, p. 529—542.
8. Idem *Suprafețe riemanniene parțial regulat exhaustibile*, Lucrările consfătuirii de geometrie și topologie, Iași, 2—5 iunie 1958, p. 219—226.
9. Idem *Suprafețe riemanniene parțial regulat exhaustibile*, Studii și cercetări mat. Acad. R.P.R., 1959, t. X, 2, p. 307—323.
10. S. Stoilow: *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Gauthier Villars Paris, 1938 sau 1956.

11. C. Andreian Cazacu: *Über eine Formel von S. Stoilow*, Revue de Math. pures et appl., 1960, t. V, 1, p. 59—74.
12. K. Noshiro: *Contributions to the theory of singularities of analytic functions*, Jap. Journ. of Math., 1948, t. XIX, p. 299—327.
13. T. Kuroda: *Remarks on some covering surfaces*, Rev. Math. pures et appl., t. II, 1957, p. 263—268.
14. Л. И. Волковский, *Исследования по проблеме типа*, Труды мат. инст. Стеклова, Москва-Ленинград, Т. 34, 1950.

ЧАСТИЧНО РЕГУЛЯРНО ИСЧЕРПЫВАЕМЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе автор изучает разветвленность частично регулярно исчерпываемых римановых поверхностей $(S)_T^V$. Эти поверхности допускают исчерпание полиэдрическими областями V_v , с порядком связности c_v , граница которых Γ_v проектируется на конечное число попарно не пересекающихся жордановых кривых $\gamma_v = \{\gamma_{iv}\}$, так что $T^{-1}(\gamma_v) \cap \dot{V}_v$ являлось бы пустым или компактным множеством ([8], [9]). Кривые γ_v разбивают S на конечное число областей D_{jv} , с порядком связности c_{jv} и накрытых n_{jv} листами поверхности $(S)_T^V$.

В первой части работы изложен топологический метод определения максимального числа полностью разветвленных дисков (попарно не пересекающихся жордановых областей). В работе рассматривается h дисков $\Delta \subset T(V)$, трех родов: Δ'_s — включенные в один D_{jv} , ($s = 1, \dots, h'_v$); Δ''_t — содержащие самое меньшее один D_{jv} и с границей в $S - \gamma_v$ ($t = 1, \dots, h''_v$); Δ'''_u — граница которых содержит конечное число точек из γ_v ($u = 1, \dots, h'''_v$), $h'_v + h''_v + h'''_v = h$. В § 1 устанавливается неравенство (10), из которого следует

$$\sum_s n_{jv} \left(2 - c_{jv} + \mu''_{jv} + \mu'''_{jv} - \frac{h'_{jv} + h''_{jv}}{2} \right) - \frac{n'''_{jv}}{2} h'''_{jv} + c_v - 2 \geq 0 \quad (10)$$

$$\sum_s n_{jv} \left(2 - c_{jv} + \mu''_{jv} - \frac{h'_{jv} + h''_{jv}}{2} \right) + c_v - 2 \geq 0 \quad (11)$$

$$\sum n_{jv} \left(2 - c_{jv} - \frac{h'_{jv}}{2} \right) + c_v - 2 \geq 0. \quad (12)$$

Суммы $\sum_s$ и $\sum_u$ относятся к областям $D_{jv} \not\subset (\cup \Delta'_t) \cup (\cup \Delta'''_u)$, соответственно $\not\subset \cup \Delta''_t$; μ''_{jv} и μ'''_{jv} обозначают число кривых границы D_{jv} , содержащихся в $\cup \Delta'_t$, соответственно в $\cup \Delta'''_u$; h'_{jv} и h''_{jv} — число областей $\Delta'_s \subset D_{jv}$, соответственно Δ''_t с границей, содержащейся в D_{jv} ; $n_v = \min_u n_{uv}$ — число листов V_v полностью накрывающих Δ'''_u . Если d_{jqv} — максимальная область D_{jv} , содержащаяся в V_v , c_{jqv} — ее порядок связности и n_{jqv} — число ее листов, то

$$h'_{jv} \leq 2 \left(2 - c_{jv} + \min_q \frac{c_{jqv} - 2}{n_{jqv}} \right). \quad (13)$$

Из этих неравенств вытекают различные формы теоремы дисков (§ 2, $P_1 - P_{12}$):

Предложения P_1 и P_2 устанавливают разветвленность поверхностей, для которых существует группа областей $D_{j\nu}$, больше накрытых, чем другие при любом ν .

Предложения $P_3 - P_{10}$ относятся к квазитотально исчерпываемым поверхностям, которые определены как топологический аналог регулярным исчерпываемым по-

верхностям, условиями: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{n_{j\nu}}{M_\nu} = 1$ равномерно при тех j , для которых $D_{j\nu} \subset T(V_\nu)$.

Здесь $M_\nu = n_\nu$ — число листов V_ν , полностью накрывающих $T(V_\nu)$ и $M_\nu = \max n_{j\nu}$ в случае квазитотально исчерпываемых поверхностей в строгом, соответственно, широком смысле. Например: квазитотально исчерпываемые поверхности в строгом смысле удовлетворяют неравенству (17). Если S конечного рода и число областей $D_{j\nu}$ — независимо от ν — ограничено, то h удовлетворяет (20) (где $\tilde{c}_0$ — порядок связности $T(V)$) или (21) (когда $T(V) = S$ и c_0 — порядок связности S). Если порядок c связности V конечен или $c = 1$ и число листов бесконечно, то $h \leq 2(2 - \tilde{c}_0) \leq 4$ соответственно $h \leq 3$.

В § 3 изучаются E — квазинормально исчерпываемые поверхности, случаи, когда h' , h'' и h''' уже не зависят от ν ; в частности рассмотрены поверхности Т. Курода (38) — (46) и односвязные поверхности.

В § 4 не принимается во внимание гипотеза $\Delta \subset T(V)$, что выявляет роль лакунарных значений или областей.

Вторая часть работы содержит критерии для того, чтобы частично регулярно исчерпываемая поверхность была бы регулярно исчерпываемой в смысле Альфорса. В § 1 доказывается необходимое и достаточное условие (50) для того, чтобы подпоследовательность из V_ν была бы последовательностью регулярного исчерпания ($L_{j\nu}$ — длина $\gamma_{j\nu}$ и $A_{j\nu}$ — отношение площади $D_{j\nu}$ к площади S). В § 2 изложены необходимые или достаточные критерии, полученные из (50) введением различных метрических гипотез относительно множества $\mathcal{G} = \{p \in S, p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{\nu_k}, p_{\nu_k} \in \gamma_{\nu_k}\}$, а в § 3 устанавли-

ваются критерии относительно некоторых классов поверхности (квазитотально исчерпываемых, $\mathcal{G}$ — квазинормально-исчерпываемых и т. д.). Например: Если $\mathcal{G}$ нулевой длины, поверхность-регулярно исчерпываема. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы нормально исчерпываемая поверхность была бы регулярно исчерпываема — является нулевой длины лакунарного множества. Если $T(V_\nu) = S$ и длина $\mathcal{G}$ конечна для квазитотально исчерпываемой поверхности в строгом смысле то она регулярно исчерпываема.

§ 4 содержит сравнение между результатами о разветвлении поверхностей, полученными топологическими или метрико-топологическим методами. Первый метод точнее в случае односвязных поверхностей, но в других случаях неравенства (21), (41) и (60), установленные этими двумя методами для квазитотально и $\mathcal{G}$ — квазинормально в смысле Т. Курода, соответственно для регулярно исчерпываемых поверхностей, — эквивалентны.

SURFACES DE RIEMANN PARTIELLEMENT RÉGULIÈREMENT EXHAUSTIBLES

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous étudions la ramification des surfaces de Riemann partiellement régulièrement exhaustibles $(S)_T^V$, qui admettent une exhaustion par des domaines polyédriques V_ν ayant l'ordre de connexion c_ν , dont la frontière Γ_ν se projette sur un nombre fini de courbes de Jordan $\gamma_\nu = \{\gamma_{j\nu}\}$ deux à deux disjointes sur S , telles que $T^{-1}(\gamma_\nu) \cap \text{int } V_\nu$ soit l'ensemble vide ou un ensemble compact. ([8], [9]). Les courbes γ_ν divisent S en un nombre fini de domaines $D_{j\nu}$, à connexion $c_{j\nu}$, couverts par $n_{j\nu}$ feuillettes de la surface de Riemann $(S)_T^{\text{int } V_\nu}$.

La première partie de ce travail contient une méthode topologique pour déterminer le nombre maximum des disques (domaines de Jordan deux à deux disjoints) complètement ramifiés. Nous considérons h disques $\Delta \subset T(V)$ de trois espèces : Δ'_s inclus dans un D_{jv} ($s=1, \dots, h'_v$), Δ''_t contenant au moins un D_{jv} et tels que $\text{fr } \Delta''_t \subset S - \gamma_v$ ($t=1, \dots, h''_v$) et Δ'''_u pour lesquels $\text{fr } \Delta'''_u \cap \gamma_v$ consiste dans un nombre fini de points ($u=1, \dots, h'''_v$), $h'_v + h''_v + h'''_v = h$. Dans le § 1 nous établissons l'inégalité (10), d'où découle :

$$\sum_s n_{jv} \left(2 - c_{jv} + \mu''_{jv} + \mu'''_{jv} - \frac{h'_{jv} + h''_{jv}}{2} \right) - \frac{n'''_{jv}}{2} h'''_{jv} + c_v - 2 \geq 0 \quad (10)$$

$$\sum_6 n_{jv} \left(2 - c_{jv} + \mu''_{jv} - \frac{h'_{jv} + h''_{jv}}{2} \right) + c_v - 2 \geq 0 \quad (11)$$

et

$$\sum_v n_v \left(2 - c_{jv} - \frac{h'_{jv}}{2} \right) + c_v - 2 \geq 0. \quad (1')$$

Les sommes Σ_5 et Σ_6 se rapportent aux domaines $D_{jv} \not\subset (\cup \Delta'_t) \cup (\cup \Delta'''_u)$, respectivement $\not\subset \cup \Delta''_t$; μ''_{jv} et μ'''_{jv} désignent le nombre des courbes de $\text{fr } D_{jv} \subset \cup \Delta''_t$ respectivement $\subset \cup \Delta'''_u$; h'_{jv} et h''_{jv} le nombre des domaines $\Delta'_s \subset D_{jv}$, respectivement Δ''_t tels que $\text{fr } \Delta''_t \subset D_{jv}$ et $n'''_v = \min_u n'''_{uv}$, n'''_{uv} étant le nombre des feuilletts complets de V_v sur Δ'''_u . De même, si d_{jqv} est un domaine maximum de D_{jv} , contenu dans V_v , c_{jqv} son ordre de connexion et n_{jqv} le nombre de ses feuilletts, alors

$$h'_{jv} \leq 2 \left(2 - c_{jv} + \min_q \frac{c_{jqv} - 2}{n_{jqv}} \right). \quad (1'')$$

De ces inégalités nous déduisons différentes formes du théorème des disques (§2, $P_1 - P_{12}$) : Les propositions P_1 et P_2 établissent la ramification des surfaces pour lesquelles il y a un groupe de domaines D_{jv} couverts plus que les autres à chaque étape v de l'exhaustion. Les propositions $P_3 - P_{10}$ concernent les surfaces quasi-totalement exhaustibles, que nous avons introduites comme un analogue topologique des surfaces régulièrement exhaustibles. Les recouvrements quasi-totalement exhaustibles au sens strict, respectivement large, sont définis par les conditions : $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n_{jv}}{M_v} = 1$ uniformément par rapport aux indices j pour lesquels $D_{jv} \subset T(V_v)$, où

$M_v = n_v$, le nombre des feuilletts de V_v qui recouvre complètement $T(V_v)$, respectivement $M_v = \max n_{jv}$. Par exemple : Les surfaces quasi-totalement exhaustibles au sens strict satisfont à l'inégalité (17). Si le genre de S est fini et le nombre des domaines D_{jv} borné quelque soit v , h vérifie (20) (où $\tilde{c}$ est l'ordre de connexion de $T(V)$) respectivement (21) (si $T(V) = S$ et c_0 est l'ordre de connexion de S). Si l'ordre de connexion c de V est fini ou égal à 1 et le recouvrement a une infinité de feuilletts, $h \leq 2(2 - \tilde{c}_0) \leq 4$ respectivement $h \leq 3$.

Le § 3 concerne les surfaces E — quasi-normalement exhaustibles, cas auquel h' , h'' et h''' ne dépendent plus de v , en particulier sont considérées les surfaces de T. Kuroda (38) — (46) et celles simplement connexes. Au § 4 nous renonçons à l'hypothèse $\Delta \subset T(V)$, ce qui met en évidence le rôle des valeurs ou domaines lacunaires.

La deuxième partie du travail contient des critères pour qu'une surface partiellement régulièrement exhaustible soit régulièrement exhaustible au sens d'Ahlfors. Dans le § 1, nous

démontrons une condition nécessaire et suffisante (50) pour qu'une suite partielle de V_j soit suite d'exhaustion régulière. (L_{jV} représente la longueur de γ_{jV} , et A_{jV} l'aire de D_{jV} mesurée avec l'aire de S comme unité). Le § 2 contient différents critères $P_{13} - P_{16}$ nécessaires ou suffisants, déduits de (50) en introduisant des hypothèses métriques par rapport à l'ensemble $\mathcal{G} = \{p \in S, p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{V_k}, p_{V_k} \in \gamma_{V_k}\}$, tandis que le § 3 donne des critères

relatifs aux certaines classes de surfaces: (quasi-totalement exhaustibles, E—quasi-normalement exhaustibles etc.). Par exemple: Si $\mathcal{G}$ est de longueur nulle, la surface est régulièrement exhaustible. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface normalement exhaustible soit régulièrement exhaustible est que l'ensemble lacunaire soit de longueur nulle. Si $T(V_j) = S$ et la longueur de $\mathcal{G}$ est finie pour une surface quasi-totalement exhaustible au sens strict, elle est régulièrement exhaustible.

Le § 4 contient une comparaison entre les résultats obtenus sur la ramification des surfaces par la méthode topologique et par celle métrico-topologique. La première apparaît comme plus avantageuse dans le cas simplement connexe, mais dans les autres cas, les inégalités (21), (41) et (60) établies par ces deux méthodes pour les surfaces quasi-totalement exhaustibles et E—quasi-normalement exhaustibles au sens de T. Kuroda, respectivement régulièrement exhaustibles sont équivalentes.

DESPRE SEMINORMELE N_p

NICOLAE DINULEANU

1. Introducere

Fie T un spațiu local compact, μ o măsură Radon pozitivă pe T , p și q doi exponenți conjugați ($1 \leq p, q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Următoarele două propoziții sînt cunoscute:

1) Pentru orice funcție $f \in \mathcal{L}^p$ avem

$$N_p(f) = \sup \left| \int fg d\mu \right| = \sup \int |fg| d\mu, \quad g \in \mathcal{L}^q, \quad N_q(g) \leq 1.$$

și marginea superioară poate fi luată numai pentru funcțiile g boreliene etajate, sau continue cu suport compact.

Propoziția rămîne adevărată dacă se ia $f \in \mathcal{L}_E^p$ și $g \in \mathcal{L}_{E'}^q$, unde E este un spațiu Banach și E' dualul său ([1], cap. IV, § 6, prop. 2). Propoziția rămîne de asemenea adevărată dacă f este măsurabilă și nulă pe complementara reuniunii unui șir de mulțimi compacte, chiar dacă $N_p(f) = +\infty$.

2) Dacă fg este integrabilă oricare ar fi $g \in \mathcal{L}^q$, atunci $f \in \mathcal{L}^p$.

Dacă fg este integrabilă numai pentru funcțiile g boreliene etajate, sau continue cu suport compact, atunci f este local integrabilă, dar poate să nu aparțină spațiului $\mathcal{L}^p$ pentru nici un p .

În această lucrare vom arăta că aceste propoziții rămîn adevărate în următoarea situație mai generală:

Fie E , F și G trei spații Banach și $(x, y) \rightarrow xy$ o aplicație biliniară și continuă a lui $E \times F$ în G astfel încît

$$|x| = \sup_{|y| \leq 1} |xy|, \quad \text{pentru orice } x \in E.$$

1') Pentru orice funcție măsurabilă $x: T \rightarrow E$, avem

$$\bar{N}_p(x) = \sup \int^* |xy| d\mu, \quad \bar{N}_q(y) \leq 1,$$

unde $y: T \rightarrow F$ sînt funcții boreliene etajate sau continue cu suport compact.

Propoziția rămîne adevărată chiar dacă $\bar{N}_p(\mathbf{x}) = +\infty$.

2') Dacă $\mathbf{x}$ este măsurabilă și dacă $\mathbf{xy}$ este (esențial) integrabilă pentru orice $\mathbf{y} \in \bar{\mathcal{L}}^q$ atunci $\mathbf{x} \in \bar{\mathcal{L}}^p$.

Dacă $\mathbf{x}$ nu este măsurabilă, aceste două propoziții pot să nu mai fie adevărate.

În fapt, vom considera cazul mai general în care $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ sînt cîmpuri de vectori.

Pentru a simplifica scrisul, integralele esențiale $\int, \int^*, \bar{\mu}^*, \bar{\mu}^*$, seminormele $\bar{N}_p$ și spațiile $\bar{\mathcal{L}}_p$ vor fi notate fără bară. În concordanță cu aceasta, funcțiile și mulțimile local neglijabile, esențial integrabile etc., vor fi numite respectiv neglijabile, integrabile etc.

Cu aceste convenții, inegalitatea lui Hölder

$$\int^* f g d\mu \leq N_p(f) N_q(g)$$

are loc oricare ar fi funcțiile $f \geq 0$ și $g \geq 0$, finite sau infinite, chiar dacă membrul drept este de forma $0 \cdot \infty$ (cu convenția $0 \cdot \infty = 0$).

2. Cîmpuri de vectori măsurabile

Fie $\mathcal{E} = (E(t))_{t \in T}$ și $\mathcal{F} = (F(t))_{t \in T}$ două familii de spații Banach și G un spațiu Banach. Norma unui element z din unul din spațiile $E(t)$, $F(t)$ sau G va fi notată cu $|z|$. Dacă z este un cîmp de vectori* din $\mathcal{E}$ sau din $\mathcal{F}$ sau dacă $z: T \rightarrow G$, vom nota cu $|z|$ funcția numerică $t \rightarrow |z(t)|$. Presupunem că pentru fiecare $t \in T$ există o aplicație biliniară continuă $(x, y) \rightarrow xy$ a lui $E(t) \times F(t)$ în G astfel încît să avem

$$|x| = \sup_{\substack{|y| \leq 1 \\ y \in F(t)}} |xy|, \text{ pentru orice } x \in E(t).$$

Pentru două cîmpuri $x \in \mathcal{E}$ și $y \in \mathcal{F}$ vom nota cu xy funcția $t \rightarrow x(t)y(t)$ cu valori în G .

Pentru fiecare t , spațiul $E(t)$ se poate scufunda izometric în $\mathcal{L}(F(t), G)$. În particular, dacă $G = \mathbb{C}$ avem $E(t) \subset F'(t)$ sau $F(t) \subset E'(t)$.

Vom presupune că există o familie fundamentală $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ și o familie fundamentală $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ de cîmpuri de vectori continue care verifică axioma următoare:

funcția xy este continuă, oricare ar fi $x \in \mathcal{A}$ și $y \in \mathcal{B}$.

Dacă $E(t) = E$ și $F(t) = F$ pentru orice $t \in T$, se ia $\mathcal{A}$ mulțimea aplicațiilor constante ale lui T în E și $\mathcal{B}$ mulțimea aplicațiilor constante ale lui T în F . În acest caz, axioma precedentă este verificată.

* Dacă $\mathcal{H} = (H(t))_{t \in T}$ este o familie de cîmpuri de vectori, notăm cu $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ mulțimea cîmpurilor de vectori z definite pe T astfel încît $z(t) \in H(t)$ oricare ar fi $t \in T$. Pt. teoria cîmpurilor de vectori v. [3].

Dacă $x \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ este continuu (în raport cu $\mathcal{A}$) iar $y \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$ este continuu (în raport cu $\mathcal{B}$), atunci funcția xy (cu valori în G) este continuă.

Dacă x este măsurabil (în raport cu $\mathcal{A}$ și μ) și dacă y este măsurabil (în raport cu $\mathcal{B}$ și μ), atunci funcția xy este măsurabilă (v. [2]).

Mulțimea cîmpurilor $x \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$ continue cu suport compact va fi notată $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}(T)$.

Mulțimea cîmpurilor boreliene etajate de forma $y = \sum_{i=1}^n \varphi_{A_i} y_i$ cu $y_i \in \mathcal{B}$ și A_i mulțimi boreliene etajate, va fi notată cu $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$.

Pentru demonstrarea rezultatelor anunțate vom folosi următoarele două leme:

Lema 1. Fie x un cîmp din $\mathcal{O}(\mathcal{S})$, $0 < a < 1$ și $K \subset T$ o mulțime compactă. Dacă restricția lui x la K este continuă și nu se anulează pe K , există un cîmp borelian etajat $y \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$ cu suportul conținut în K , astfel încît

$$a < |y(t)| < 2 - a \text{ și } a|x(t)| < |x(t)y(t)|, \text{ pentru } t \in K.$$

Fie $\varepsilon > 0$ cu $a + \varepsilon < 1$ și $t_0 \in K$. Există un element $y_0 \in \mathcal{F}(t_0)$ cu

$$|y_0| = 1 \text{ și } (a + \varepsilon)|x(t_0)| < |x(t_0)y_0|.$$

Există de asemenea un cîmp $y_0 \in \mathcal{B}$ cu $|y_0(t_0) - y_0| < \varepsilon$. Atunci

$$\begin{aligned} |x(t_0)y(t_0)| &= |x(t_0)y_0 + x(t_0)(y_0(t_0) - y_0)| \geq \\ &\geq |x(t_0)y_0| - |x(t_0)(y_0(t_0) - y_0)| > (a + \varepsilon)|x(t)| - \varepsilon|x(t_0)| = a|x(t_0)| \end{aligned}$$

și

$$a < 1 - \varepsilon = |y_0| - \varepsilon < |y_0(t_0)| < |y_0| + \varepsilon < 2 - a.$$

Deoarece restricția lui x la K este continuă, există o vecinătate deschisă V_0 a lui t_0 astfel încît

$$a < |y_0(t)| < 2 - a \text{ și } a|x(t)| < |x(t)y_0(t)|, \text{ pentru } t \in V_0.$$

Deoarece K este compact, există o familie $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ de mulțimi deschise care acoperă pe K și o familie $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de cîmpuri din $\mathcal{B}$, astfel încît pentru fiecare i să avem

$$a < |y_i(t)| < 2 - a \text{ și } a|x(t)| < |x(t)y_i(t)|, \text{ pentru } t \in V_i.$$

Să alegem o familie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de mulțimi boreliene cu $\bigcup_{i=1}^n A_i = K$ și

$A_i \subset V_i$ pentru fiecare i . Cîmpul borelian etajat $y = \sum_{i=1}^n \varphi_{A_i} y_i$ îndeplinește condițiile lemei.

Lema 2. Pentru orice cîmp măsurabil $x \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ și orice număr a cu $0 < a < 1$, există un cîmp măsurabil $y \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$ cu

$$a \leq |y(t)| \leq 2 - a \text{ și } a|x(t)| \leq |x(t)y(t)|, \text{ aproape peste tot.}$$

Fie $\mathcal{X}$ o familie de mulțimi compacte nevide, disjuncte două câte două, astfel încît mulțimea $N = T - \bigcup_{K \in \mathcal{X}} K$ este neglijabilă și fiecare punct

$t \in T$ posedă o vecinătate care este intersectată de o mulțime cel mult numerabil de mulțimi din $\mathcal{X}$.

Deoarece x este măsurabil, fiecare mulțime $K \in \mathcal{K}$ este reuniunea unei mulțimi neglijabile și a unui șir (C_n) de mulțimi compacte, disjuncte două câte două, astfel încât restricția lui x la fiecare C_n să fie continuă.

Așadar, putem alege de la început familia $\mathcal{K}$ astfel încât restricția lui x la fiecare mulțime $K \in \mathcal{K}$ să fie *continuă*.

Fie $K \in \mathcal{K}$. Mulțimea $K_0 = \{t \mid t \in K, x(t) = 0\}$ este compactă. Deoarece $K - K_0$ este integrabilă, există o mulțime neglijabilă N și un șir $(K_n)_{1 \leq n < +\infty}$ de mulțimi compacte, disjuncte două câte două, a căror reuniune este $K - K_0$. Deoarece restricția lui x la fiecare K_n cu $n \geq 1$ este continuă și nu se anulează, există un câmp borelian etajat $y_n \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$ cu

$$a < |y_n(t)| < 2 - a \text{ și } a |x(t)| < |x(t)y_n(t)|,$$

pentru $t \in K_n$.

Să alegem un câmp măsurabil $y_0 \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$ cu $|y_0(t)| = 1$ pentru $t \in K_0$ ([2], prop. 8).

Câmpul $y_K = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{K_n} y_n$ din $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ este măsurabil și pentru orice $t \in K - N$ avem

$$a \leq |y_K(t)| \leq 2 - a \text{ și } a |x(t)| \leq |x(t)y_K(t)|$$

Câmpul $y = \sum_{K \in \mathcal{K}} y_K$ din $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ este măsurabil și verifică inegalitățile din enunț.

3. Calculul seminormelor N_p

Teorema 1. Pentru orice câmp măsurabil $x \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ avem

$$N_p(x) = \sup \int^* |xy| d\mu = \sup \int^* |x| |y| d\mu$$

pentru $y \in \mathcal{E}_B$ cu $N_q(y) \leq 1$.

Folosind inegalitatea lui Hölder, deducem

$$\sup \int^* |xy| d\mu \leq \sup \int^* |x| |y| d\mu \leq N_p(x)$$

pentru $y \in \mathcal{E}_B$ cu $N_q(y) = 1$.

Rămîne de demonstrat inegalitatea

$$N_p(x) \leq \sup \int^* |xy| d\mu, \text{ pentru } y \in \mathcal{E}_B \text{ cu } N(y) \leq 1.$$

Dacă $N_p(\mathbf{x}) = 0$, această negalitate este verificată. Să presupunem deci că $0 < N_p(\mathbf{x}) \leq +\infty$ și fie $\alpha < N_p(\mathbf{x})$. Deoarece

$$N_p(\mathbf{x}) = \sup_K N_p(\mathbf{x}\varphi_K), \quad K \text{ compact},$$

există o mulțime compactă $K \subset T$ cu $N_p(\mathbf{x}\varphi_K) > \alpha$.

Fie $K_0 = \{t \in K \mid \mathbf{x}(t) = 0\}$. Mulțimea $K - K_0$ este integrabilă iar $\mathbf{x}$ este măsurabil; există deci o mulțime neglijabilă $N \subset K - K_0$ și un șir crescător $(K_n)_{1 \leq n < \infty}$ de mulțimi compacte a căror reuniune este $(K - K_0) - N$, astfel încît restricția lui $\mathbf{x}$ la fiecare K_n să fie continuă. Șirul $(|\mathbf{x}| \varphi_{K_n})$ este crescător și $|\mathbf{x}| \varphi_{(K - K_0) - N} = \sup |\mathbf{x}| \varphi_{K_n}$, deci

$$N_p(\mathbf{x}\varphi_K) = N_p(\mathbf{x}\varphi_{(K - K_0) - N}) = \sup N_p(\mathbf{x}\varphi_{K_n}).$$

Există deci un număr natural n astfel încît $N_p(\mathbf{x}\varphi_{K_n}) > \alpha$.

Deoarece restricția lui $\mathbf{x}$ la mulțimea compactă K_n este continuă, funcția $|\mathbf{x}| \varphi_{K_n}$ este mărginită, măsurabilă și cu suport compact, deci $|\mathbf{x}| \varphi_{K_n} \in \mathcal{L}^p$. Există atunci o funcție boreliană etajată $\varphi \geq 0$ cu $N_q(\varphi) \leq 1$ astfel încît

$$\int |\mathbf{x}| \varphi_{K_n} \varphi d\mu > \alpha$$

Fie $0 < a < 1$. Deoarece restricția lui $\mathbf{x}$ la K_n este continuă și diferită de zero, există (lema 1) un cîmp borelian etajat $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$ cu $\mathbf{z}_0(t) = 0$ pentru $t \notin K_n$ și $a \leq \mathbf{z}_0(t) \leq 2 - a$ și $a|\mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{x}(t)\mathbf{z}_0(t)|$ pentru $t \in K_n$. Cîmpul $\mathbf{y}_0 = \frac{1}{2-a}\mathbf{z}_0\varphi$ din $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ este borelian, etajat, $|\mathbf{y}_0| \leq \varphi$, deci $N_q(\mathbf{y}_0) \leq 1$ și

$$\frac{a}{2-a} \alpha < \frac{a}{2-a} \int |\mathbf{x}| \varphi_{K_n} \varphi d\mu \leq \int |\mathbf{x}\mathbf{y}_0| d\mu \leq \sup \int |\mathbf{x}\mathbf{y}| d\mu$$

pentru $N_q(\mathbf{y}) \leq 1$. Făcînd $a \rightarrow 1$ și $\alpha \rightarrow N_p(\mathbf{x})$, deducem

$$N_p(\mathbf{x}) \leq \sup \int |\mathbf{x}\mathbf{y}| d\mu, \quad N_q(\mathbf{y}) \leq 1.$$

și teorema este demonstrată.

Observații 1°. În calculul marginii superioare din enunțul teoremei se pot lua numai cîmpurile boreliene etajate $\mathbf{y} \in \mathcal{O}_B$ cu $N_q(\mathbf{y}) < 1$, sau numai cîmpurile cu $N_q(\mathbf{y}) = 1$, chiar dacă $N_p(\mathbf{x}) = +\infty$.

2°. Dacă $\mathbf{x}$ nu este măsurabil, teorema nu mai este în general adevărată.

Teorema 2. Pentru orice cîmp măsurabil $\mathbf{x} \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$, avem

$$N_p(\mathbf{x}) = \sup \int |\mathbf{x}\mathbf{y}| d\mu = \sup \int |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| d\mu$$

pentru $\mathbf{y} \in \mathcal{X}_B(T)$ cu $N_q(\mathbf{y}) \leq 1$.

Ca și în teorema precedentă, va fi suficient să demonstrăm numai inegalitatea

$$N_p(x) \leq \sup \int^* |xy| d\mu, \quad y \in \mathcal{K}_B(T), \quad N_q(y) \leq 1,$$

în cazul cînd $0 < N_p(x) \leq +\infty$.

Fie $\alpha < N_p(x)$. Ca și în teorema precedentă putem găsi o mulțime compactă $K = K_n \subset T$ astfel încît restricția lui x la K să fie continuă, diferită de zero și $N_p(x|_K) > \alpha$.

Urmează că $x\varphi_K \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^p$, deci există un cîmp borelian etajat $z \in \mathcal{S}_B$ cu $N_q(z) < 1$ și $\int |xz| \varphi_K d\mu > \alpha$. Să presupunem întîi $q < +\infty$ și fie $0 < \varepsilon < 1 - N_q(z)$.

Deoarece spațiul $\mathcal{K}_B(T)$ este dens în $\mathcal{L}_B^q$, există un cîmp $y \in \mathcal{K}_B(T)$ cu $N_q(y - z) < \varepsilon / N_p(x\varphi_K)$. Atunci

$$\int |x\varphi_K(y - z)| d\mu \leq \int |x\varphi_K| |y - z| d\mu \leq N_p(x\varphi_K) N_q(y - z) < \varepsilon$$

deci

$$\begin{aligned} \int |xy| d\mu &\geq \int |x\varphi_K y| d\mu = \int |x\varphi_K z + x\varphi_K(y - z)| d\mu \geq \\ &\geq \int |x\varphi_K z| d\mu - \int |x\varphi_K(y - z)| d\mu < \alpha - \varepsilon \end{aligned}$$

și deci

$$\alpha - \varepsilon \leq \sup \int^* |xy| d\mu, \quad y \in \mathcal{K}_B(T), \quad N_q(y) \leq 1.$$

Făcînd $\varepsilon \rightarrow 0$ și $\alpha \rightarrow N_p(x)$ deducem

$$N_p(x) \leq \sup \int^* |xy| d\mu, \quad y \in \mathcal{K}_B(T), \quad N_q(y) \leq 1.$$

Să presupunem acum că $q = +\infty$ și să scriem cîmpul etajat z sub forma $z = \sum_i \varphi_{A_i} z_i$ cu $z_i \in \mathcal{B}$ și A_i disjuncte. Putem presupune că $A_i \subset K$ pentru fiecare i , ceea ce nu modifică inegalitatea $\int |xz| \varphi_K d\mu > \alpha$. Fie $\varepsilon > 0$. Fie U o mulțime deschisă relativ compactă cu $\bigcup_i A_i \subset U$ și fie $0 < a < 1$. Fie apoi η astfel încît să avem

$$\eta \sum_i \|z_i\|_U \left(\frac{1}{a} + 1 \right) \|x\|_K < \varepsilon$$

Pentru fiecare i există o mulțime compactă $K_i \subset A_i$ cu $\mu(A_i - K_i) < \eta$ și o mulțime deschisă U_i cu $K_i \subset U_i \subset U$ cu $\mu(U_i - K_i) < \eta$. Deoarece mulțimile K_i sînt disjuncte, putem alege mulțimile U_i disjuncte două cîte două.

Pentru fiecare i , restricția lui z_i la K_i este continuă, deci se poate prelungi la un câmp y_i continuu cu suportul conținut în U_i și $\|y_i\| \leq \frac{1}{a} \|z_i\|_{K_i} \leq \|z_i\|_U$. Câmpul $y = a \sum_i y_i$ este continuu, cu suport compact. Deoarece câmpurile y_i au suporturile disjuncte, avem

$$N_\infty(y) = a \sup_i N_\infty(y_i) \leq \sup_i N_\infty(z_i \varphi_{K_i}) \leq 1.$$

Avem, apoi

$$\begin{aligned} \int_K \left| x \left(\frac{1}{a} y - z \right) \right| d\mu &\leq \|x\|_K \int_K \left| \sum_i (y_i - \varphi_{A_i} z) \right| d\mu \leq \\ &\leq \|x\|_K \sum_i \int (|y_i| \varphi_{U_i - K_i} + |z_i| \varphi_{A_i - K_i}) d\mu \leq \\ &\leq \|x\|_K \sum_i (\|y_i\| \mu(U_i - K_i) + \|z_i\|_U \mu(A_i - K_i)) \leq \\ &\leq \|x\|_K \eta \sum_i \left(\frac{1}{a} \|z_i\|_U + \|z_i\|_U \right) < \varepsilon \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} \int^* |xy| d\mu &\geq \int |x \varphi_K y| d\mu = a \int |x \varphi_K \frac{1}{a} y| d\mu \geq \\ &\geq a \int |x \varphi_K z| d\mu - a \int \left| x \varphi_K \left(\frac{1}{a} y - z \right) \right| d\mu \geq a z - a\varepsilon. \end{aligned}$$

Făcînd $a \rightarrow 1$, $\varepsilon \rightarrow 0$ și $\alpha \rightarrow N_1(x)$ deducem

$$N_1(x) \leq \sup \int^* |xy| d\mu, \quad y \in \mathcal{X}_B(T), \quad N_\infty(y) \leq 1.$$

Teorema 3. Fie $x \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ un câmp măsurabil. Avem $x \in \mathcal{L}_\alpha^p$ dacă și numai dacă $xy \in \mathcal{L}_G^1$ oricare ar fi $y \in \mathcal{L}_B^q$.

Trebuie să arătăm numai că, dacă $xy \in \mathcal{L}_G^1$ pentru orice $y \in \mathcal{L}_B^q$ atunci $x \in \mathcal{L}_\alpha^p$. Deoarece x este măsurabil, pentru aceasta este suficient să arătăm că $N_p(x) < +\infty$ adică,

$$\sup \int^* |xy| d\mu < +\infty, \quad y \in \mathcal{L}_B^q, \quad N_q(y) \leq 1.$$

Fie $0 < a < 1$. Există (lema 2) un câmp măsurabil $y \in \mathcal{O}(\mathcal{F})$ cu $a \leq |y(t)| \leq 2 - a$ și $a|x(t)| \leq |x(t)y(t)|$, aproape peste tot.

Fie $\varphi \in \mathcal{L}^q$. Atunci $\varphi y \in \mathcal{L}_B^q$ deci funcția $x\varphi y$ este integrabilă. Dar

$$a|x(t)| |\varphi(t)| \leq |x(t) \varphi(t) y(t)|,$$

aproape peste tot, deci funcția $a|x| |\varphi|$ este de asemenea integrabilă, oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{L}^q$.

Rezultă că a $|x| \in \mathcal{L}^p$ deci $N_p(x) < +\infty$ și teorema este demonstrată.

Să presupunem că $G = C$ și să scriem $\langle x, y \rangle$ în loc de xy , și $\mathcal{A}'$ în loc de $\mathcal{B}$.

Teorema 4. Dacă $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^p$ atunci

$$N_p(x) = \sup \left| \int \langle x, x' \rangle d\mu \right|,$$

pentru $x' \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^q$ cu $N_q(x') \leq 1$.

Este suficient să presupunem $N_p(x) > 0$ și să demonstrăm inegalitatea

$$N_p(x) \leq \sup \left| \int \langle x, x' \rangle d\mu \right|, \quad x' \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^q, \quad N_q(x') \leq 1.$$

Fie $0 < \alpha < N_p(x)$. Există un câmp $y \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^q$ cu $N_q(y) \leq 1$ și

$$\int |\langle x, y \rangle| d\mu > \alpha.$$

Să notăm $\theta(t) = 1$ dacă $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$ și

$$\theta(t) = \frac{\langle x(t), y(t) \rangle}{|\langle x(t), y(t) \rangle|}$$

în caz contrar. Funcția θ este măsurabilă, $|\theta(t)| \equiv 1$ și

$$|\langle x(t), y(t) \rangle| = \theta(t) \langle x(t), y(t) \rangle = \langle x(t), \theta(t) y(t) \rangle$$

Notînd $x' = \theta y$, avem $x' \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^q$, $N_q(x') = N_q(y) \leq 1$, și

$$\left| \int \langle x, x' \rangle d\mu \right| = \int \langle x, x' \rangle d\mu = \int \langle x, y \rangle d\mu > \alpha$$

de unde rezultă inegalitatea dorită.

Observație. Se poate arăta că marginea superioară se poate lua numai pentru câmpurile $x' \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}'}$ sau $x' \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}'}(T)$ cu $N_q(x') \leq 1$.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Bourbaki: *Intégration*, chap. I—IV, 1952, chap. V, 1957, chap. VI, 1959.
2. N. Dinuleanu: *Spații Orlicz de câmpuri de vectori*, Studii și cercetări matematice, 8 (1957) pp. 343—412.
3. R. Godement: *Sur la théorie des représentations unitaires*, Annals of Math. 53 (1951) pp. 68—124.

О ПОЛУНОРМАХ N_p

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть T локально компактное пространство μ положительная мера Радона на T ; E, F, G три пространства Банаха, $(x, y) \rightarrow xy$ билинейное непрерывное преобразование от $E \times F$ в G такое что $|x| = \sup_{|y| \leq 1} |xy|$ для всех $x \in E$, p и q два сопряжённых

числа: $1 \leq p, q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказывается, что если функция $x: T \rightarrow E$ измерима, то

$$\bar{N}_p(x) = \sup \int^* |xy| d\mu \text{ для } y \in \mathcal{L}_F^q \text{ с } \bar{N}_q(y) \leq 1.$$

Этот результат был известен в случае, когда $G = \mathbb{C}$ и $N_p(x) < +\infty$.

Доказывается также, что если функция $x: T \rightarrow E$ измерима и если $xy \in \mathcal{L}_G^1$ при всех $y \in \mathcal{L}_F^q$, то $x \in \mathcal{L}_E^p$.

Все эти результаты изложены в работе для случая когда x и y векторные поля.

ON THE SEMINORMS N_p

ABSTRACT

Let T be a locally compact space, μ a positive Radon measure on T ; E, F, G three Banach spaces, $(x, y) \rightarrow xy$ a bilinear continuous mapping of $E \times F$ into G , so that $|x| = \sup_{|y| \leq 1} |xy|$ for every $x \in E$, p and q two conjugate numbers: $1 \leq p, q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

It is proved that if $x: T \rightarrow E$ is measurable, then

$$\bar{N}_p(x) = \sup \int^* |xy| d\mu, \text{ for } y \in \mathcal{L}_F^q \text{ with } \bar{N}_q(y) \leq 1$$

This result was known if $G = \mathbb{C}$ and $N_p(x) < +\infty$.

It is proved also that if $x: T \rightarrow E$ is measurable and if $xy \in \mathcal{L}_G^1$ for every $y \in \mathcal{L}_F^q$ then $x \in \mathcal{L}_E^p$.

In fact, these results are exposed for vector fields x and y .

O EVALUARE A RESTULUI ÎN APROXIMAREA FUNCȚIILOR PRIN POLINOAMELE LUI S. N. BERNSTEIN

LIA ARAMĂ

1. Fie $f(x)$ o funcție oarecare, continuă în intervalul $[0, 1]$ și fie $B_n(x; f)$ polinomul de interpolare al lui S. N. Bernștein corespunzător funcției $f(x)$ și intervalului $[0, 1]$, adică

$$B_n(x; f) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f(x_k) \quad (1)$$

unde s-a notat: $x_k = \frac{k}{n}$ $k = (0, 1, \dots, n)$

și fie:

$$\mathcal{R}_n(x, f) = f(x) - B_n(x, f)$$

O metodă generală de studiere a restului formulelor liniare de aproximare ale analizei a fost elaborată de Prof. T. Popoviciu în lucrarea [1]; această metodă se bazează pe studiul comportării funcționalei liniare reprezentînd restul formulei liniare respective în raport cu funcțiile convexe de un ordin egal cu gradul de exactitate al formulei respective. Cu ajutorul acestei metode s-a obținut în lucrarea [2] următoarea evaluare pentru restul $R_n(x; f)$:

$$f(x) - B_n(x; f) = - \frac{x(1-x)}{n} [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f] \quad (2)$$

unde ξ_1, ξ_2, ξ_3 reprezintă noduri distincte din intervalul $[0, 1]$, iar $[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f]$ reprezintă diferența divizată a funcției $f(x)$ pe aceste 3 noduri.

În lucrarea de față pornind de la o problemă pusă de Acad. M. Nicolescu se dă o altă evaluare a restului $R_n(x, f)$ în ipoteza mai restrictivă, că $f(x) \in C^2[0, 1]$. Se obține o evaluare de forma:

$$f(x) - B_n(x; f) = \int_0^1 K_n(x, s) f''(s) ds \quad (3)$$

unde $K_n(x, s)$ reprezintă o funcție continuă în domeniul $D\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$ și ea se determină în lucrarea de față. Se mai arată că funcția $K_n(x, s)$ este negativă în interiorul domeniului D și că se anulează pe frontiera acestui domeniu.*

În scopul obținerii unei evaluări de forma (3) a restului $R_n(x, f)$, se studiază în prealabil formula de cuadratură

$$\int_0^x f(s) ds = \int_0^x B_n(s; f) ds + \mathcal{R}_n(x; f). \quad (4)$$

punându-se restul ei $R_n(x, f)$ sub următoarea formă integrală :

$$\mathcal{R}_n(x, f) = \int_0^1 \Phi_n(x, s) f''(s) ds$$

unde $\Phi_n(x, s)$ reprezintă o funcție continuă împreună cu derivata ei parțială, în raport cu x în domeniul D . În lucrare, se determină efectiv această funcție, studiindu-se semnul ei în domeniul D .

Metoda de lucru utilizată în lucrarea de față pentru obținerea restului $\mathcal{R}_n(x, f)$ a formulei de cuadratură (3) se datorește lui J. Radon (4) și se bazează pe formula generalizată de integrare prin părți. Această metodă a fost utilizată și dezvoltată de Prof. D. V. Ionescu în mai multe lucrări dintre care cităm în special lucrarea [3], care are o contingență mai mare cu cercetarea de față.

Fie deci $f(x)$ o funcție oarecare din clasa $C^2[0, 1]$ și fie $x_k = \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) nodurile care intervin în (1).

Determinarea funcției $K_n(x, s)$ o vom face pentru fiecare din domeniile elementare $D_{ij} \{x_{i-1} \leq x \leq x_i, x_{j-1} \leq s \leq x_j\}$.

$$i, j = 1, 2, \dots, n, \text{ cu } \bigcup_{(i,j)} D_{ij} = D$$

Fie x un număr oarecare din intervalul $[0, 1]$ pe care îl vom presupune fixat în cele ce urmează.

Să presupunem pentru început că x nu coincide cu nici un astfel de nod — mai precis că

$$x_{i-1} < x < x_i \quad (5)$$

Prin integrare termen cu termen, se obține din (1) formula :

$$\int_0^x B_n(s; f) ds = \sum_{k=0}^n f(x_k) P_k(x), \quad (6)$$

* Notă în corectură. Recent am fost informați că o evaluare de forma (3) a fost obținută printr-o altă metodă de către D. D. Ștancu, într-o lucrare aflată sub tipar la revista „Mathematics of Computation“, July, 1963.

unde s-a notat:

$$P_k(x) = C_n^k \int_0^x s^k (1-s)^{n-k} ds, \quad (7)$$

Pe de altă parte, ținînd seama de (5) putem scrie

$$\begin{aligned} \int_0^x f(s) ds = & \int_0^{x_1} \varphi_1''(s) f(s) ds + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2''(s) f(s) ds + \dots + \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \varphi_{i-1}''(s) f(s) ds + \int_{x_{i-1}}^x \bar{\varphi}_i''(s) f(s) ds + \\ & + \int_x^{x_i} \bar{\varphi}_i'(s) f(s) ds + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}''(s) f(s) ds + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_n''(s) f(s) ds \end{aligned} \quad (8)$$

unde $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_{i-1}(s); \bar{\varphi}_i(s); \bar{\varphi}_i'(s); \varphi_{i+1}(s), \dots, \varphi_n(s)$ reprezintă soluții ale sistemului de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} \varphi_1''(s) = \varphi_2''(s) = \dots = \varphi_{i-1}''(s) &= 1, \\ \bar{\varphi}_i''(s) = 1, \quad \bar{\varphi}_i''(s) &= 0, \\ \varphi_{i+1}''(s) = \varphi_{i+2}''(s) = \dots = \varphi_n''(s) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Aplicînd fiecărei integrale care figurează în membrul al doilea al relației (8) formula de integrare prin părți, se obțin relațiile:

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k''(s) f(s) ds &= f(x_k) \varphi_k'(x_k) - f(x_{k-1}) \varphi_k'(x_{k-1}) - f'(x_k) \varphi_k(x_k) + \\ &+ f'(x_{k-1}) \varphi_k(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(s) f''(s) ds \\ &(k = 1, 2, \dots, i-1), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^x \bar{\varphi}_i''(s) f(s) ds &= f(x) \bar{\varphi}_i'(x) - f(x_{i-1}) \bar{\varphi}_i'(x_{i-1}) - f'(x) \bar{\varphi}_i(x) + \\ &+ f'(x_{i-1}) \bar{\varphi}_i(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^x \bar{\varphi}_i(s) f''(s) ds, \\ \int_x^{x_i} \bar{\varphi}_i''(s) f(s) ds &= f(x) \bar{\varphi}_i'(x) - f(x) \bar{\varphi}_i'(x) - f'(x) \bar{\varphi}_i(x) + \\ &+ f'(x) \bar{\varphi}_i(x) + \int_x^{x_i} \bar{\varphi}_i(s) f''(s) ds. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \varphi_l''(s) f(s) ds &= f(x_l) \varphi_l'(x_l) - f(x_{l-1}) \varphi_l'(x_{l-1}) - f'(x_l) \varphi_l(x_l) + \\ &+ f'(x_{l-1}) \varphi_l(x_{l-1}) + \int_{x_{l-1}}^{x_l} \varphi_l(s) f''(s) ds \\ &\quad (l = i + 1, i + 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Adunînd membru cu membru relațiile (10)–(13) și identificînd coeficienții astfel obținuți ai numerelor

$$f(x_0), f'(x_0), f(x_1), f'(x_1), \dots, f(x_i), f'(x_i), f(x), f'(x), f(x_{i+1}), f'(x_{i+1}), \dots, f(x_n), f'(x_n)$$

cu coeficienții aceluiași numere din (6), se obține următorul sistem de condiții polilocale :

$$\varphi_1'(0) = -p_0(x), \varphi_1(0) = 0 \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k'(x_k) - \varphi_{k+1}'(x_k) &= p_k(x), \quad \varphi_k(x_k) = \varphi_{k+1}(x_k), \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, i - 2) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{i-1}'(x_{i-1}) - \bar{\varphi}_i'(x_{i-1}) &= p_{i-1}(x), \quad \varphi_{i-1}(x_{i-1}) = \bar{\varphi}_i(x_{i-1}); \\ \bar{\varphi}_i'(x) &= \bar{\bar{\varphi}}_i'(x), \quad \bar{\varphi}_i(x) = \bar{\bar{\varphi}}_i(x); \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_i'(x_i) - \varphi_{i+1}'(x_i) &= p_i(x), \quad \bar{\varphi}_i(x_i) = \varphi_{i+1}(x_i), \\ \varphi_l'(x_l) - \varphi_{l+1}'(x_l) &= p_l(x), \quad \varphi_l(x_l) = \varphi_{l+1}(x_l), \\ &\quad (l = i + 1, i + 2, \dots, n - 1) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\varphi_n'(1) = p_n(x), \quad \varphi_n(1) = 0 \quad (17)$$

În baza acestei condiții, ținîndu-se seama de (9) și (6), prin adunare membru cu membru a relațiilor (10) — (12) se obține formula :

$$\int_0^x f(s) ds = \int_0^x B_n(s; f) ds + \int_0^1 \Phi_{n,i}(x, s) f''(s) ds. \quad (18)$$

unde :

$$\Phi_{n,i}(x, s) = \begin{cases} \varphi_k(s), & \text{dacă } s \in (x_{k-1}, x_k) \quad (k = 1, \dots, i - 1) \\ \bar{\varphi}_i(s), & \text{dacă } s \in (x_{i-1}, x), \\ \bar{\bar{\varphi}}_i(s), & \text{dacă } s \in (x, x_i) \\ \varphi_l(s), & \text{dacă } s \in (x_{l-1}, x_l) \quad (l = i + 1, \dots, n) \end{cases} \quad (19)$$

Din sistemul de ecuații diferențiale (9) rezultă că

$$\varphi_k(s) = \frac{s^2}{2} + A_k(x)s + B_k(x), \quad (k = 1, 2, \dots, i-1)$$

$$\bar{\varphi}_i(s) = \frac{s^2}{2} + \bar{A}_i(x)s + \bar{B}_i(x) \quad (20)$$

$$\overline{\overline{\varphi}}_i(s) = \overline{\overline{A}}_i(x)s + \overline{\overline{B}}_i(x)$$

$$\varphi(s) = A_l(x)s + B_l(x) \quad (l = i+1, \dots, n)$$

unde coeficienții $A_j(x)$, $B_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) și coeficienții $\bar{A}_i(x)$, $\bar{B}_i(x)$, $\overline{\overline{A}}_i(x)$, $\overline{\overline{B}}_i(x)$ se determină cu ajutorul condițiilor (13)–(17).

Disponem astfel de $2n+2$ funcții arbitrare de variabila x pentru a satisface condițiile (13)–(17) care sînt în număr de $2n+4$. Este de observat însă că funcțiile $p_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) verifică două relații, în care variabila x nu intervine în mod explicit. Pentru a obține aceste relații observăm întîi că restul $\mathcal{R}_n(x, f)$ formulei (4) este identic nul pentru $f(x) \equiv 1$ și $f(x) \equiv x$, de unde rezultă identitățile

$$\sum_{k=0}^n p_k(x) \equiv x$$

$$\sum_{k=0}^n x_k p_k(x) \equiv \frac{x^2}{2} \quad x_k = \frac{k}{n}. \quad (21)$$

De aici se deduce îndată o primă relație

$$\sum_{k=0}^n x_k p_k(x) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n p_k(x) \right)^2 \equiv 0. \quad (22)$$

O a doua relație se obține observînd de exemplu că $p_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ de unde în baza primei identități din (21) obținem a doua relație

$$(n+1)p_n(x) - \left(\sum_{k=0}^n p_k(x) \right)^{n+1} \equiv 0. \quad (23)$$

Din relațiile (13) se obține :

$$A_1(x) = -p_0(x), \quad B_1(x) \equiv 0 \quad (24)$$

Apoi din (14) se obțin formulele de recurență

$$A_{k+1}(x) = A_k(x) - p_k(x).$$

$$B_{k+1}(x) = B_k(x) + \frac{k}{n} [A_k(x) - A_{k+1}(x)] = B_k(x) + \frac{k}{n} p_k(x) \quad (25)$$

$$(k = 1, 2, \dots, i-2)$$

$$\bar{A}_i(x) = A_{i-1}(x) - p_{i-1}(x)$$

$$\bar{B}_i(x) = B_{i-1}(x) + \frac{i-1}{n} [A_{i-1}(x) - \bar{A}_i(x)] = B_{i-1}(x) + \frac{i-1}{n} p_{i-1}(x) \quad (26)$$

Utilizând în continuare relațiile (17) și apoi relațiile (16) în care luăm succesiv $l = n-1, n-2, \dots, i+1$, obținem următoarele relații de recurență :

$$A_n(x) = p_n(x); B_n(x) = -p_n(x) \quad (27)$$

$$\begin{cases} A_l(x) = A_{l+1}(x) + p_l(x) \\ B_l(x) = B_{l+1}(x) + \frac{1}{n} [A_{l+1}(x) - A_l(x)] = B_{l+1}(x) - \frac{1}{n} p_l(x) \end{cases} \quad (28)$$

$$(l = n-1, n-2, \dots, i+1)$$

$$\bar{A}_i(x) = A_{i+1}(x) + p_i(x).$$

$$\bar{B}_i(x) = B_{i+1}(x) + \frac{i}{n} [A_{i+1}(x) - \bar{A}_i(x)] = B_{i+1}(x) - \frac{i}{n} p_i(x). \quad (29)$$

Din relațiile de recurență (24)–(26), obținem :

$$\left. \begin{aligned} A_k(x) &= [p_0(x) + p_1(x) + \dots + p_{k-1}(x)]. \\ B_k(x) &= \frac{1}{n} [0 \cdot p_0(x) + 1 \cdot p_1(x) + 2 \cdot p_2(x) + \dots + (k-1) p_{k-1}(x)] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$(k = 1, 2, \dots, i-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_i(x) &= -[p_0(x) + p_1(x) + \dots + p_{i-1}(x)] \\ \bar{B}_i(x) &= -\frac{1}{n} [0 \cdot p_0(x) + 1 \cdot p_1(x) + \dots + (i-1) p_{i-1}(x)] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Apoi din (27)—(29) obținem :

$$\left. \begin{aligned} A_l(x) &= p_n(x) + p_{n-1}(x) + \dots + p_l(x). \\ B_l(x) &= -\frac{1}{n} [np_n(x) + (n-1)p_{n-1}(x) + \dots + l p_l(x)] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

($l = n, n-1, \dots, i+1$)

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_i(x) &= p_n(x) + p_{n-1}(x) + \dots + p_i(x) \\ \bar{B}_i(x) &= -\frac{1}{n} [np_n(x) + (n-1)p_{n-1}(x) + \dots + i p_i(x)] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Cu ajutorul acestor expresii, funcțiile din (20) sînt determinate pentru orice $s \in [0, 1]$ și $x \in (x_{i-1}, x_i)$ și ele satisfac condițiile polilocale (13), (14), (16), (17). Rămîne să arătăm că funcțiile $\bar{\varphi}_i(s)$, $\bar{\varphi}_i(s)$ astfel determinate verifică și relațiile (15).

Într-adevăr ținînd seama de (20), condițiile (15) se transcriu

$$x + \bar{A}_i(x) = \bar{A}_i(x) \quad (34)$$

$$\frac{x^2}{2} + x\bar{A}_i(x) + \bar{B}_i(x) = x\bar{A}_i(x) + \bar{B}_i(x)$$

și ținînd seamă de expresiile (31) (33), se observă îndată că aceste relații se verifică identic în baza relațiilor (21).

Vom presupune acum că x variază în intervalul (x_{i-1}, x_i) . După cum se constată din (20), (30), (33) precum și din condițiile (14)—(16) funcția $\Phi_{n,i}(x, s)$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor (x, s) în domeniul $\{0 \leq s \leq 1, x_{i-1} < x < x_i\}$. De asemenea se constată ușor că această funcție admite derivata parțială în raport cu x în intervalul $x_{i-1} < x < x_i$ și că această derivată este o funcție continuă în raport cu variabila s , în intervalul $0 \leq s \leq 1$. Într-adevăr, din (19) se deduce

$$\frac{\partial \Phi_{n,i}(x, s)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \varphi_k(s)}{\partial x} \text{ dacă } s \in (x_{k-1}, x_k) \quad (k = 1, \dots, i-1) \\ \frac{\partial \bar{\varphi}_i(s)}{\partial x} \text{ dacă } s \in (x_{i-1}, x) \\ \frac{\partial \bar{\varphi}_i(s)}{\partial x} \text{ dacă } s \in (x, x_{i+1}) \\ \frac{\partial \varphi_l(s)}{\partial x} \text{ dacă } s \in (x_{l-1}, x_l) \quad (l = i+1, \dots, n) \end{cases} \quad (35)$$

Rămâne de verificat următoarele egalități :

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow x_k} \frac{\partial \varphi_k(s)}{\partial x} &= \lim_{s \rightarrow x_k} \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x} \quad (k = 1, \dots, i-2) \\
 \lim_{s \rightarrow x_{i-1}} \frac{\partial \varphi_{i-1}(s)}{\partial x} &= \lim_{s \rightarrow x_{i-1}} \frac{\partial \bar{\varphi}_i(s)}{\partial x} \\
 \lim_{s \rightarrow x} \frac{\partial \bar{\varphi}_i(s)}{\partial x} &= \lim_{s \rightarrow x} \frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}_i(s)}{\partial x} \\
 \lim_{s \rightarrow x_i} \frac{\partial \bar{\bar{\varphi}}_i(s)}{\partial x} &= \lim_{s \rightarrow x_i} \frac{\partial \varphi_{i+1}(s)}{\partial x} \\
 \lim_{s \rightarrow x_l} \frac{\partial \varphi_l(s)}{\partial x} &= \lim_{s \rightarrow x_l} \frac{\partial \varphi_{l+1}(s)}{\partial x} \quad (l = i+1, \dots, n-1)
 \end{aligned} \tag{36}$$

Aceste egalități se pot verifica prin calcul.

Rezultă în definitiv existența și continuitatea funcției $\frac{\partial \Phi_{n,i}}{\partial x}$ în domeniul $\{0 \leq s \leq 1, x_{i-1} < x < x_i\}$.

În cele ce urmează, vom nota cu $K_{n,i}(x, s)$ această funcție.

Conform formulelor (35) avem deci, oricare ar fi $x \in (x_{i-1}, x_i)$:

$$\left. \begin{aligned}
 K_{n,i}(x, s) &= -[p'_0(x) + p'_1(x) + \dots + p'_{k-1}(x)]s + \frac{1}{n}[0 \cdot p'_0(x) + 1 \cdot p'_1(x) + \dots + (k-1) \cdot p'_{k-1}(x)] \\
 &\quad \text{dacă } s \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \dots, i-1) \\
 K_{n,i}(x, s) &= -[p'_0(x) + p'_1(x) + \dots + p'_{i-1}(x)]s + \frac{1}{n}[0 \cdot p'_0(x) + 1 \cdot p'_1(x) + \dots + (i-1) \cdot p'_{i-1}(x)] \\
 &\quad \text{dacă } s \in [x_{i-1}, x] \\
 K_{n,i}(x, s) &= [p'_n(x) + \dots + p'_i(x)]s - \frac{1}{n}[np'_n(x) + (n-1)p'_{n-1}(x) + \dots + i \cdot p'_i(x)] \\
 &\quad \text{dacă } s \in [x, x_i] \\
 K_{n,i}(x, s) &= [p'_n(x) + \dots + p'_l(x)]s - \frac{1}{n}[np'_n(x) + (n-1)p'_{n-1}(x) + \dots + lp'_l(x)] \\
 &\quad \text{dacă } s \in [x_{l-1}, x_l] \quad (l = i+1, \dots, n)
 \end{aligned} \right\} \tag{37}$$

Vom studia semnul funcției $K_{n,i}(x, s)$ când $x \in (x_{i-1}, x_i)$ și când $s \in [0, 1]$. Vom presupune că x este un număr fixat în intervalul (x_{i-1}, x_i) iar s este variabil în intervalul $[0, 1]$.

Din (37) se observă întâi că

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{n,i}}{\partial s}(x, s) &< 0 \text{ dacă } s \in (0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{i-1}, x) \\ \frac{\partial K_{n,i}}{\partial s}(x, s) &> 0 \text{ dacă } s \in (x, x_i), (x_i, x_{i+1}), \dots, (x_{n-1}, x_n) \end{aligned} \quad (38)$$

Tot din (37) se constată :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow x_k + 0} K_{n,i}(x, s) &= -[p'_0(x) + p'_1(x) + \dots + p'_k(x)] \frac{k}{n} + \frac{1}{n} [0 \cdot p'_0(x) + 1 \cdot p'_1(x) + \dots + k p'_k(x)] = \\ &= -\frac{1}{n} [k \cdot p'_0(x) + (k-1) p'_1(x) + \dots + 0 \cdot p'_k(x)] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow x_l - 0} K_{n,i}(x, s) &= [p'_n(x) + p'_{n-1}(x) + \dots + p'_l(x)] \frac{1}{n} - \\ &- \frac{1}{n} [n p'_n(x) + (n-1) p'_{n-1}(x) + \dots + 1 \cdot p'_l(x)] = \\ &= -\frac{1}{n} [(n-1) p'_n(x) + (n-1-1) p'_{n-1}(x) + \dots + 0 \cdot p'_l(x)] \\ &\quad (l = i, i+1, \dots, n) \end{aligned} \quad (40)$$

Din (39) se deduc relațiile :

$$\begin{aligned} K_{n,i}(x, x_0 + 0) &= 0 \\ K_{n,i}(x, x_k + 0) &< 0 \quad (k = 1, \dots, i-1) \end{aligned} \quad (41)$$

iar din (40) se deduc relațiile :

$$\begin{aligned} K_{n,i}(x, x_l - 0) &< 0 \\ K_{n,i}(x, x_n - 0) &= 0 \quad (l = i, i+1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (42)$$

Din (41) și (38) precum și din proprietatea de continuitate a funcției $K_{n,i}(x, s)$ în raport cu variabila s în intervalul $0 \leq s \leq 1$ (a se vedea relațiile (36)) rezultă că funcția $K_{n,i}(x, s)$ descrește de la valoarea zero la un minimum atunci când variabila s crește de la zero la valoarea $s = x$. La fel din (42) și (38) se constată că funcția $K_{n,i}(x, s)$ crește de la valoarea sa minimă la valoarea zero atunci când s crește de la valoarea $s = x$ la valoarea $s = 1$.

Rezultă că funcția $K_{n,i}(x, s)$ este negativă în intervalul $0 < s < 1$.

În cele precedente s-a presupus că x este un număr arbitrar din intervalul (x_{i-1}, x_i) . În această ipoteză s-a introdus funcția $K_{n,i}(x, s)$ definită cu ajutorul relațiilor (37).

Vom presupune acum că x este variabil pe mulțimea formată din reunirea intervalelor $(x_0, x_1), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$. Pentru aceste intervale se construiesc respectiv funcțiile $K_{n,1}(x, s), K_{n,2}(x, s), \dots, K_{n,n}(x, s)$, definite în conformitate cu formulele (37).

Vom arăta acum că oricare ar fi $s \in [0, 1]$, două funcții consecutive $K_{n,i}(x, s)$ și $K_{n,i+1}(x, s)$ au limite egale când x tinde către punctul x_i .

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_i - 0} K_{n, i}(x, s) &= -[p'_0(x_i) + p'_1(x_i) + \dots + p'_{k-1}(x_i)]s + \\
 &+ \frac{1}{n} [0 \cdot p'_0(x_i) + 1 \cdot p'_1(x_i) + \dots + (k-1)p'_{k-1}(x_i)] \\
 &\quad \text{dacă } s \in (x_{k-1}, x_k), \quad (k = 1, 2, \dots, i-1) \\
 \\
 \lim_{x \rightarrow x_i - 0} K_{n, i}(x, s) &= -[p'_0(x_i) + p'_1(x_i) + \dots + p'_{i-1}(x_i)]s + \\
 &+ \frac{1}{n} [0 \cdot p'_0(x_i) + \dots + (i-1)p'_{i-1}(x_i)] \\
 &\quad \text{dacă } s \in (x_{i-1}, x_i): \\
 \\
 \lim_{i \rightarrow 0} K_{n, i}(x, s) &= [p'_n(x_i) + \dots + p'_l(x_i)] \\
 &s - \frac{1}{n} [np'_n(x_i) + (n-1)p'_{n-1}(x_i) + \dots + 1 \cdot p'_l(x_i)] \\
 &\quad \text{dacă } s \in (x_{l-1}, x_l) \quad (l = i+1, i+2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{43}$$

La fel, scriind relații analoge cu (37) pentru funcția $K_{n, i+1}(x, s')$ obținem

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_i + 0} K_{n, i+1}(x, s) &= -[p'_0(x_i) + p'_1(x_i) + \dots + p'_{k-1}(x_i)]s + \\
 &+ \frac{1}{n} [0 \cdot p'_0(x_i) + 1 \cdot p'_1(x_i) + \dots + (k-1)p'_{k-1}(x_i)] \\
 &\quad \text{dacă } s \in (x_{k-1}, x_k); \quad (k = 1, 2, \dots, i) \\
 \\
 \lim_{x \rightarrow x_i + 0} K_{n, i+1}(x, s) &= [p'_n(x_i) + \dots + p'_{i+1}(x_i)]s - \\
 &- \frac{1}{n} [np'_n(x_i) + (n-1)p'_{n-1}(x_i) + \dots + (i+1)p'_{i+1}(x_i)] \\
 &\quad \text{dacă } s \in (x_i, x_{i+1}): \\
 \\
 \lim_{x \rightarrow x_i + 0} K_{n, i+1}(x, s) &= [p'_n(x_i) + \dots + p'_l(x_i)]s - \\
 &- \frac{1}{n} [np'_n(x_i) + (n-1)p'_{n-1}(x_i) + \dots + l \cdot p'_l(x_i)] \\
 &\quad \text{dacă } s \in (x_{l-1}, x_l) \quad l = i+2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{44}$$

Din (43) și (44) se constată că are loc egalitatea :

$$\lim_{x \rightarrow x_i - 0} K_{n,i}(x, s) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} K_{n,i+1}(x, s) \quad (45)$$

oricare ar fi valoarea variabilei s luată din unul oarecare din intervalele

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$$

Un calcul simplu ne arată că funcțiile : $\psi(s) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} K_{n,i}(x, s)$ și $\chi(s) = \lim_{x \rightarrow x_i - 0} K_{n,i+1}(x, s)$ este continuă în raport cu s și în punctele $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Să considerăm acum funcția

$$K_n(x, s) = \begin{cases} K_{n,1}(x, s) & \text{dacă } x \in [x_0, x_1] \\ K_{n,2}(x, s) & \text{dacă } x \in [x_1, x_2] \\ \dots & \dots \\ K_{n,n}(x, s) & \text{dacă } x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases} \quad (46)$$

unde $K_{n,i}(x, s)$ este definită conform formulelor (37) și (43).

Din egalitățile (45)–(46) și din faptul că aceste egalități au loc oricare ar fi $i = 1, \dots, n-1$, rezultă că funcția $K_n(x, s)$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor (x, s) în patratul anterior $D \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$.

De asemenea funcția $K_n(x, s)$ este negativă în interiorul domeniului D . Din (41) și (42) se constată că funcția $K_n(x, s)$ se anulează în punctele segmentelor $\{s = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ și $\{s = 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Se poate cu ușurință arăta cu ajutorul relațiilor (43) și (44) că funcția $K_n(x, s)$ se anulează pe întreaga frontieră a domeniului D .

Revenind la formula (18) și ținând seamă de faptul că funcția $\Phi_{n,i}(x, s)$ admite derivată parțială $\frac{\partial \Phi_{n,i}(x, s)}{\partial x} = K_{n,i}(x, s)$ continuă în raport cu ansamblul variabilelor (x, s) în domeniul $\{x_{i-1} \leq x \leq x_i, 0 \leq s \leq 1\}$, rezultă că identitatea (18) se poate deriva membru cu membru în raport cu x . Obținem astfel identitatea :

$$f(x) = B_n(x; f) + \int_0^1 K_{n,i}(x, s) f''(s) ds.$$

valabilă pentru $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Cum însă această relație are loc oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, n$, ținând seamă de definiția (46) a funcției $K_n(x, s)$ obținem formula :

$$f(x) = B_n(x; f) + R_n(x, f) \quad (47)$$

unde

$$R_n(x; f) = \int_0^1 K_n(x, f) f''(s) ds \quad (48)$$

valabilă pentru orice $x \in [0, 1]$.

Astfel am determinat restul $R_n(x; f)$ al formulei de interpolare (47).

Ținând seamă de faptul că funcția $K_n(x, s)$ este negativă în interiorul domeniului D , anulându-se pe frontiera acestuia, vom putea aplica formula medie a calculului integral și vom obține :

$$R_n(x, f) = \int_0^1 K_n(x, s) f''(s) ds = f''(\xi) \int_0^1 K_n(x, s) ds, \quad (49)$$

unde ξ reprezintă un număr din intervalul $(0, 1)$.

Pentru a se calcula integrala ce figurează în ultimul membru se poate proceda înlocuind în identitatea (47), (48) pe $f(x)$ cu $\frac{x^2}{2}$. Obținem

$$\frac{x^2}{2} = B_n\left(x; \frac{x^2}{2}\right) + \int_0^1 K_n(x, s) ds.$$

de unde obținem :

$$\int_0^1 K_n(x, s) ds = \frac{x^2}{2} - B_n\left(x; \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} [x^2 - B_n(x; x^2)]$$

Dar, după cum se știe, avem $B_n(x; x^2) = \frac{x[1 + (n-1)x]}{n}$, iar

$$x^2 - B_n(x; x^2) = -\frac{x(1-x)}{n}, \text{ astfel că :}$$

$$\int_0^1 K_n(x, s) ds = -\frac{x(1-x)}{2n}$$

Cu aceasta, formula (49) se transcrie :

$$R_n(x; f) = -\frac{x(1-x)}{2n} f''(\xi), \quad \xi \in (0, 1). \quad (50)$$

și acest rezultat este în concordanță cu formula (4) stabilită în lucrarea [2] și [5].

Se poate arăta cu ușurință că există și sînt continue în domeniul D derivatele parțiale $\frac{\partial^v K_n(x, s)}{\partial x^v}$ ($v = 1, 2, \dots$) cu excepția valorii $s = x$ pentru care derivata parțială $\frac{\partial K_n(x, s)}{\partial x}$ prezintă un salt în raport cu variabila s . Ținînd seamă de acest fapt în ipoteza că $f(x) \in C^v[0, 1]$, putem deriva membru cu membru identitatea (47) de v ori și obținem formulele

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = \frac{d^v B_n(x; f)}{dx^v} + \int_0^1 \frac{\partial^v K_n(x, s)}{\partial x^v} f''(s) ds. \quad (51)$$

BIBLIOGRAFIE

1. Popoviciu T.: *Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei. Studii și cercetări de matematică* (Cluj), tom. X., 337—389 (1959).
2. Aramă O.: *Proprietăți privind monotonia șirului polinomial de interpolare ale lui S. N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor. Studii și cercet. de matem.* (Cluj), tom. VIII, 195—210 (1957). *Idem* în limba rusă în *Mathematica*, vol. 2 (25), 25—40 (1960).
3. Ionescu D. V.: *Formule de cuadratură cu noduri exterioare. Studii și cercet. de matem.* (Cluj), tom. IX, 45—134 (1958).
4. Radon J.: *Restausdrücke bei Interpolations und Quadratur Formeln durch bestimmte Integralen. Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1935, tem. 42, 389 (1935).
5. Bernstein S. N.: *Complément à l'article de E. Voronovskaya. C. R. Acad. Sci URSS* 1932, pp. 86—92.

ИСЧИСЛЕНИЕ ОСТАТКА ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ СЧЁТЕ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В данной работе показывается, что остаток $R_n(x; f)$ в формулы приближения

$$f(x) = B_n(x; f) + R_n(x, f) \quad (47)$$

где $B_n(x; f)$ представляет собой многочлен интерполирования (1) С. Н. Бернштейна, в том случае, когда $f(x) \in C^2[0, 1]$, можно написать в виде:

$$R_n(x; f) = \int_0^1 K_n(x, s) f''(s) ds, \quad (48)$$

где $K_n(x, s)$ представляет собой непрерывную функцию в области $D \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$ будучи отрицательной внутри этой области и равняясь нулю на её границе.

Доказывается, что эта функция допускает в области частную производную любой степени по отношению к переменной x , которые тоже непрерывны в той же области.

На основании этого утверждения можно производить член за членом по отношению к x тождество (47). Получаются таким образом формулы:

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = \frac{d^v B_n(x; f)}{dx^v} + \int_0^1 \frac{\partial^v K_n(x, s)}{\partial x^v} f''(s) ds \quad v = 1, 2, \dots \quad (51)$$

UNE ÉVALUATION DU RESTE DANS L'APPROXIMATION DES FONCTIONS PAR LES POLYNÔMES DE S. N. BERNSTEIN

R É S U M É

On démontre dans cet ouvrage que le reste $R_n(x; f)$ de la formule d'approximation,

$$f(x) = B_n(x; f) + R_n(x; f) \quad (47)$$

où $B_n(x, f)$ représente le polynôme d'interpolation de S. N. Bernstein lorsque $f(x) \in C^2(0, 1)$ peut être présenté sous la forme:

$$R_n(x; f) = \int_0^1 K_n(x, s) f''(s) ds, \quad (48)$$

où $K_n(x, s)$ représente une fonction continue dans le domaine D négative à l'intérieur de ce domaine et annulée à sa frontière. On démontre aussi que cette fonction admet dans le domaine D des dérivées partielles de n'importe quel ordre par rapport à la variable x qui sont elles-aussi continues dans le même domaine. On peut dériver, partant de cette affirmation, chaque membre par rapport à x dans l'identité (53).

On obtient ainsi les formules

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = \frac{d^v B_n(x; f)}{dx^v} + \int_0^1 \frac{\partial^v K_n(x, f)}{\partial x^v} f''(s) ds \quad v = 1, 2, \dots \quad (51)$$

CARACTERIZĂRI LOCALE ȘI CARACTERIZĂRI GLOBALE ALE FUNCTIILOR INTEGRABILE ȘI ALE FUNCTIILOR INTEGRALE

SOLOMON MARCUS

Fie f o funcție reală definită pe intervalul real $[a, b]$. Să presupunem că există o funcție reală F definită pe $[a, b]$ și astfel încît

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b). \quad (1)$$

F va fi numită o *funcție integrală* pe $[a, b]$ iar f va fi numită o *funcție integrabilă* pe $[a, b]$.

În cele ce urmează, facem cîteva observații referitoare la tema anunțată în titlu. Integrala din (1) va fi considerată, pe rînd, în sensul lui Riemann, al lui Lebesgue, al lui Denjoy-Perron și al lui Denjoy-Hincin.

Funcții integrabile Riemann

Cea mai cunoscută caracterizare locală a funcțiilor mărginite care sînt integrabile Riemann este cea dată de Lebesgue: O funcție mărginită este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă ea este continuă aproape peste tot pe $[a, b]$.

Problema 1. Fie f o funcție reală (mărginită sau nu) definită pe $[a, b]$. Să se găsească o proprietate de structură, necesară și suficientă, de natură locală, pentru ca f să fie integrabilă Riemann în sens generalizat.

În ceea ce privește caracterizarea globală a funcțiilor mărginite care sînt integrabile Riemann pe $[a, b]$, există în literatură mai multe teoreme. Iată două dintre ele: 1. O funcție mărginită este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă ea este măsurabilă Jordan pe $[a, b]$. (Pentru noțiunea de „funcție măsurabilă Jordan“ a se vedea [3] și [6]; pentru referințe mai vechi, a se vedea [7] și [2].) 2. O funcție mărginită f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă, pentru orice mulțime deschisă G , mulțimea $f^{-1}(G)$ este reuniunea dintre o mulțime deschisă și o mulțime de măsură nulă și, pentru orice mulțime închisă F , mulțimea $f^{-1}(F)$ este diferența dintre o mulțime închisă și o mulțime de măsură nulă [5].

Problema 2. Fie f o funcție reală (mărginită sau nu) definită pe $[a, b]$. Să se găsească o proprietate de structură de natură globală, necesară și suficientă ca f să fie integrabilă Riemann în sens generalizat pe $[a, b]$.

Funcții integrale Riemann

Problema 3. Să se caracterizeze local și global clasa funcțiilor lip-schitziene pe $[a, b]$ care sînt funcții integrale Riemann din funcții mărginite.

Problema 4. Să se dea o caracterizare locală și una globală clasei funcțiilor absolut continue pe $[a, b]$ care sînt funcții integrale Riemann în sens generalizat pe $[a, b]$.

Funcții integrabile Lebesgue

O proprietate de natură globală, caracteristică funcțiilor mărginite care sînt integrabile Lebesgue pe $[a, b]$ este măsurabilitatea Lebesgue. Pe de altă parte, combinînd o teoremă a lui Denjoy din [1] cu o teoremă a lui Stepanov din [10], rezultă că o funcție mărginită pe $[a, b]$ este integrabilă Lebesgue pe $[a, b]$ dacă și numai dacă f este aproximativ continuă aproape peste tot pe $[a, b]$.

Problema 5. Să se dea o caracterizare locală și una globală funcțiilor reale care sînt sumabile Lebesgue pe un interval compact, respectiv ne-compact.

Funcții integrale Lebesgue

Din punct de vedere global, aceste funcții se caracterizează prin proprietatea de continuitate absolută.

Problema 6. Să se dea o caracterizare locală a funcțiilor integrale Lebesgue.

Funcții integrabile Denjoy-Perron

Problema 7. Să se dea o caracterizare locală și una globală funcțiilor integrabile Denjoy-Perron.

Funcții integrale Denjoy-Perron

O caracterizare locală a acestor funcții a fost obținută recent de către G. P. Tolstov [11]. Iată această caracterizare :

Funcția F este, pe $[a, b]$, o funcție integrală Denjoy-Perron dacă și numai dacă există o funcție f definită pe $[a, b]$, un interval $[c, d]$ și o funcție φ definită pe $[c, d]$, astfel încît reprezentarea parametrică

$$x = \varphi(t), \quad y = F(\varphi(t)) \quad (c \leq t \leq d)$$

să fie diferențiabilă și

$$dy = f(x)dx \quad (a \leq x \leq b).$$

f este integrabilă Denjoy-Perron pe $[a, b]$ iar integrala ei nedefinită este dată de F .

O caracterizare globală a funcțiilor integrale Denjoy-Perron face obiectul unei teoreme clasice și anume :

O funcție F , definită pe $[a, b]$, este o funcție integrală Denjoy-Perron pe $[a, b]$ dacă și numai dacă F are, pe $[a, b]$, proprietatea de continuitate absolută generalizată în sens restrâns (proprietatea ACG*) ([9], p. 231).

Pe de altă parte, se știe că o funcție care are proprietatea ACG* este derivabilă aproape peste tot ([9], p. 230—231). Derivabilitatea aproape peste tot poate fi caracterizată global în felul următor :

O funcție F este derivabilă aproape peste tot pe $[a, b]$ dacă și numai dacă ea este aproape absolut continuă pe $[a, b]$ ([8]).

Proprietatea de „aproape absolut continuitate“ se definește în felul următor :

Fie $C \subset [a, b]$ o mulțime închisă. Fie $[\alpha_\gamma, \beta_\gamma]$ un sistem finit S de intervale fără puncte interioare comune, care acoperă pe C . F are variația $v(C)$ pe C dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$|v(C) - \sum_\gamma (F(\beta_\gamma) - F(\alpha_\gamma))| < \varepsilon$$

pentru orice sistem S care acoperă pe C și pentru care $|\beta_\gamma - \alpha_\gamma| < \delta$. Fie $C^* = [a, x] \cap C$. F este absolut continuă pe C dacă $v(C^*)$ este absolut continuă pe $[a, b]$. F este aproape absolut continuă pe $[a, b]$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime închisă $C \subset (a, b)$, astfel încât F să fie absolut continuă pe C și $(b - a) - m(C) < \varepsilon$. (Prin $m(C)$ s-a notat măsura lui C).

Combinând cele două rezultate de mai sus, se obține :

Dacă o funcție F are proprietatea ACG pe un interval $[a, b]$, atunci F este aproape absolut continuă pe $[a, b]$.*

Funcții integrabile Denjoy-Hincin

Problema 8. Să se dea o caracterizare locală și una globală funcțiilor integrabile Denjoy-Hincin.

Funcții integrale Denjoy-Hincin

Nu se cunoaște o caracterizare locală a funcțiilor absolut continue în sens generalizat (funcții (ACG) ; [9], p. 223). Găsirea unei astfel de caracterizări ar conduce la rezolvarea următoarei probleme :

Problema 9. Să se dea o caracterizare locală a funcțiilor integrale Denjoy-Hincin.

O caracterizare globală a funcțiilor integrale Denjoy-Hincin face obiectul unei teoreme bine cunoscute și anume :

O funcție F , definită pe $[a, b]$, este o funcție integrală Denjoy-Hincin pe $[a, b]$ dacă și numai dacă F are pe $[a, b]$ proprietatea continuității absolute în sens generalizat (proprietatea ACG) ([9], p. 241).

Pe de altă parte, se știe că o funcție care are proprietatea ACG este asimptotic derivabilă aproape peste tot ([9], p. 223). Derivabilitatea asimptotică aproape peste tot poate fi caracterizată global în felul următor :

O funcție F , definită și măsurabilă pe $[a, b]$, este asimptotic derivabilă aproape peste tot pe $[a, b]$ dacă și numai dacă F este, pentru fiecare $\varepsilon > 0$, absolut continuă pe $[a, b]$, cu excepția unei mulțimi de măsură inferioară lui ε . ([4], p. 255).

Noțiunea de „continuitate absolută cu excepția unei mulțimi de măsură inferioară lui ε ” se definește în felul următor: Există în $[a, b]$ o mulțime perfectă P de măsură mai mare ca $(b - a) - \varepsilon$ și astfel încât suma oscilațiilor funcției în orice sistem finit de intervale disjuncte tinde, în $[a, b]$, uniform către zero, de îndată ce suma lungimilor acestor intervale tinde la zero, cu condiția ca să se ia în considerație numai valorile funcției în punctele mulțimii P . ([4], p. 255).

Combinând cele două rezultate de mai sus, obținem:

O funcție măsurabilă F , care are proprietatea ACG pe $[a, b]$, este, pentru fiecare $\varepsilon > 0$, absolut continuă pe $[a, b]$, cu excepția unei mulțimi de măsură inferioară lui ε .

RELAȚIILE DINTRE DOUĂ TIPURI DE CONTINUITATE ABSOLUTĂ

Să considerăm următoarele două tipuri de continuitate absolută:

Tipul α : Continuitatea absolută cu excepția unei mulțimi de măsură inferioară lui $\varepsilon > 0$, pentru ε pozitiv arbitrar ([4], p. 255).

Tipul β : Aproape absolut continuitatea, în sensul din [8].

Vom arăta mai întâi că

Tipul α nu implică tipul β .

Într-adevăr, să presupunem, prin reducere la absurd, că n-ar fi așa. Fie f o funcție măsurabilă și aproximativ derivabilă aproape peste tot pe $[0, 1]$. Conform teoremei din [4], p. 255, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime perfectă Π de măsură superioară lui $1 - \varepsilon$, astfel încât f este absolut continuă pe Π . Rezultă, conform presupunerii raționamentului prin absurd, că f este de tipul β , deci, conform teoremei din [8], f este derivabilă aproape peste tot pe $[0, 1]$. Ar rezulta deci ca, pentru orice funcție măsurabilă, derivabilitatea aproximativă aproape peste tot să implice derivabilitatea ordinară aproape peste tot. Însă se știe (a se vedea de exemplu [9], p. 224) că există funcții ACG pe un interval $[a, b]$, pentru care punctele de nederivabilitate ordinară formează o mulțime de măsură pozitivă. Contradicția obținută arată că *propoziția enunțată este valabilă nu numai pentru funcții măsurabile, ci chiar pentru funcții continue.*

Vom arăta acum că

Tipul β implică tipul α .

Într-adevăr, derivabilitatea ordinară implică derivabilitatea aproximativă; este suficient acum să ținem seama de teoremele din [8] și [4], p. 255, pentru ca să rezulte propoziția enunțată.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Denjoy: *Sur les fonctions dérivées sommables*, Bull. Soc. Math. de France 43 (1915), 161—248.
2. O. Frink, Jr.: *Jordan measure and Riemann integration*, Annals of Math. 34 (1933), 518—526.
3. O. Haupt — C. Pauc: *Mesure et topologie adaptées. Espaces mesurés topologiques*. Comptes Rendus, Acad. Sci. Paris, 230 (1950). 711—712.
4. A. Khintchine: *Recherches sur la structure des fonctions mesurables*, Fundam. Math. 9 (1927), 212—279.
5. N. Levine: *A note on functions continuous almost everywhere*. Amer. Math. Monthly 66 (1959), p. 791—792.
6. S. Marcus: *La mesure de Jordan et l'intégrale de Riemann dans un espace mesuré topologique*, Acta Scientiarum Math. 20, fasc. 2—3 (1959), 156—163.
7. Miron Nicolescu: *Sur les fonctions mesurables (J)*, Bull. des Sciences math. 57 (1933), 276—281.
8. B. Pettineo: *Sur la dérivabilité des fonctions*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 243 (1956), 553—554.
9. S. Saks: *Theory of the integral*, Warszawa-Lwow, 1937.
10. W. Stepanov: *Sur une propriété caractéristique des fonctions mesurables*, Rec. Math. Soc. Math. Moscou, 30 (1924), p. 487—489.
11. Г. П. Толстов: *Параметрическое дифференцирование и узкий интеграл Данжуа*, Матем. сборник, т. 53 (95), № 3 (1961), ст. 387—392.

ЛОКАЛЬНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Сочетая различные результаты, существующие в литературе, устанавливаются локальные и глобальные характеристические свойства различных типов интегральных или интегрируемых функций в смысле Риманна, Лебега, Данжуа-Перрона или Данжуа-Хинчина. Далее устанавливается соотношение существующее между абсолютной непрерывностью в смысле [8] и абсолютной непрерывностью в смысле [4] — стр. 255.

Выявляются девятнадцать неразрешённые задачи.

CARACTÉRISATIONS LOCALES ET CARACTÉRISATIONS GLOBALES DES FONCTIONS INTÉGRABLES ET DES FONCTIONS INTÉGRALES

RÉSUMÉ

En combinant des résultats divers, on établit des caractérisations locales ou globales pour certains types de fonctions qui sont des intégrales indéfinies ou de fonctions intégrables — notamment ceux de Riemann, Lebesgue, Denjoy-Perron et Denjoy-Khintchine. On établit aussi le rapport qui existe entre la continuité absolue au sens des [8] et la continuité absolue au sens de [4], p. 255. On signale neuf problèmes non résolus.

HISTORICAL

1. A. J. ... 1911, p. 111-112.
2. A. J. ... 1912, p. 113-114.
3. A. J. ... 1913, p. 115-116.
4. A. J. ... 1914, p. 117-118.
5. A. J. ... 1915, p. 119-120.
6. A. J. ... 1916, p. 121-122.
7. A. J. ... 1917, p. 123-124.
8. A. J. ... 1918, p. 125-126.
9. A. J. ... 1919, p. 127-128.
10. A. J. ... 1920, p. 129-130.
11. A. J. ... 1921, p. 131-132.
12. A. J. ... 1922, p. 133-134.
13. A. J. ... 1923, p. 135-136.
14. A. J. ... 1924, p. 137-138.
15. A. J. ... 1925, p. 139-140.
16. A. J. ... 1926, p. 141-142.
17. A. J. ... 1927, p. 143-144.
18. A. J. ... 1928, p. 145-146.
19. A. J. ... 1929, p. 147-148.
20. A. J. ... 1930, p. 149-150.
21. A. J. ... 1931, p. 151-152.
22. A. J. ... 1932, p. 153-154.
23. A. J. ... 1933, p. 155-156.
24. A. J. ... 1934, p. 157-158.
25. A. J. ... 1935, p. 159-160.
26. A. J. ... 1936, p. 161-162.
27. A. J. ... 1937, p. 163-164.
28. A. J. ... 1938, p. 165-166.
29. A. J. ... 1939, p. 167-168.
30. A. J. ... 1940, p. 169-170.
31. A. J. ... 1941, p. 171-172.
32. A. J. ... 1942, p. 173-174.
33. A. J. ... 1943, p. 175-176.
34. A. J. ... 1944, p. 177-178.
35. A. J. ... 1945, p. 179-180.
36. A. J. ... 1946, p. 181-182.
37. A. J. ... 1947, p. 183-184.
38. A. J. ... 1948, p. 185-186.
39. A. J. ... 1949, p. 187-188.
40. A. J. ... 1950, p. 189-190.
41. A. J. ... 1951, p. 191-192.
42. A. J. ... 1952, p. 193-194.
43. A. J. ... 1953, p. 195-196.
44. A. J. ... 1954, p. 197-198.
45. A. J. ... 1955, p. 199-200.
46. A. J. ... 1956, p. 201-202.
47. A. J. ... 1957, p. 203-204.
48. A. J. ... 1958, p. 205-206.
49. A. J. ... 1959, p. 207-208.
50. A. J. ... 1960, p. 209-210.
51. A. J. ... 1961, p. 211-212.
52. A. J. ... 1962, p. 213-214.
53. A. J. ... 1963, p. 215-216.
54. A. J. ... 1964, p. 217-218.
55. A. J. ... 1965, p. 219-220.
56. A. J. ... 1966, p. 221-222.
57. A. J. ... 1967, p. 223-224.
58. A. J. ... 1968, p. 225-226.
59. A. J. ... 1969, p. 227-228.
60. A. J. ... 1970, p. 229-230.
61. A. J. ... 1971, p. 231-232.
62. A. J. ... 1972, p. 233-234.
63. A. J. ... 1973, p. 235-236.
64. A. J. ... 1974, p. 237-238.
65. A. J. ... 1975, p. 239-240.
66. A. J. ... 1976, p. 241-242.
67. A. J. ... 1977, p. 243-244.
68. A. J. ... 1978, p. 245-246.
69. A. J. ... 1979, p. 247-248.
70. A. J. ... 1980, p. 249-250.
71. A. J. ... 1981, p. 251-252.
72. A. J. ... 1982, p. 253-254.
73. A. J. ... 1983, p. 255-256.
74. A. J. ... 1984, p. 257-258.
75. A. J. ... 1985, p. 259-260.
76. A. J. ... 1986, p. 261-262.
77. A. J. ... 1987, p. 263-264.
78. A. J. ... 1988, p. 265-266.
79. A. J. ... 1989, p. 267-268.
80. A. J. ... 1990, p. 269-270.
81. A. J. ... 1991, p. 271-272.
82. A. J. ... 1992, p. 273-274.
83. A. J. ... 1993, p. 275-276.
84. A. J. ... 1994, p. 277-278.
85. A. J. ... 1995, p. 279-280.
86. A. J. ... 1996, p. 281-282.
87. A. J. ... 1997, p. 283-284.
88. A. J. ... 1998, p. 285-286.
89. A. J. ... 1999, p. 287-288.
90. A. J. ... 2000, p. 289-290.
91. A. J. ... 2001, p. 291-292.
92. A. J. ... 2002, p. 293-294.
93. A. J. ... 2003, p. 295-296.
94. A. J. ... 2004, p. 297-298.
95. A. J. ... 2005, p. 299-300.
96. A. J. ... 2006, p. 301-302.
97. A. J. ... 2007, p. 303-304.
98. A. J. ... 2008, p. 305-306.
99. A. J. ... 2009, p. 307-308.
100. A. J. ... 2010, p. 309-310.
101. A. J. ... 2011, p. 311-312.
102. A. J. ... 2012, p. 313-314.
103. A. J. ... 2013, p. 315-316.
104. A. J. ... 2014, p. 317-318.
105. A. J. ... 2015, p. 319-320.
106. A. J. ... 2016, p. 321-322.
107. A. J. ... 2017, p. 323-324.
108. A. J. ... 2018, p. 325-326.
109. A. J. ... 2019, p. 327-328.
110. A. J. ... 2020, p. 329-330.
111. A. J. ... 2021, p. 331-332.
112. A. J. ... 2022, p. 333-334.
113. A. J. ... 2023, p. 335-336.
114. A. J. ... 2024, p. 337-338.
115. A. J. ... 2025, p. 339-340.
116. A. J. ... 2026, p. 341-342.
117. A. J. ... 2027, p. 343-344.
118. A. J. ... 2028, p. 345-346.
119. A. J. ... 2029, p. 347-348.
120. A. J. ... 2030, p. 349-350.
121. A. J. ... 2031, p. 351-352.
122. A. J. ... 2032, p. 353-354.
123. A. J. ... 2033, p. 355-356.
124. A. J. ... 2034, p. 357-358.
125. A. J. ... 2035, p. 359-360.
126. A. J. ... 2036, p. 361-362.
127. A. J. ... 2037, p. 363-364.
128. A. J. ... 2038, p. 365-366.
129. A. J. ... 2039, p. 367-368.
130. A. J. ... 2040, p. 369-370.
131. A. J. ... 2041, p. 371-372.
132. A. J. ... 2042, p. 373-374.
133. A. J. ... 2043, p. 375-376.
134. A. J. ... 2044, p. 377-378.
135. A. J. ... 2045, p. 379-380.
136. A. J. ... 2046, p. 381-382.
137. A. J. ... 2047, p. 383-384.
138. A. J. ... 2048, p. 385-386.
139. A. J. ... 2049, p. 387-388.
140. A. J. ... 2050, p. 389-390.
141. A. J. ... 2051, p. 391-392.
142. A. J. ... 2052, p. 393-394.
143. A. J. ... 2053, p. 395-396.
144. A. J. ... 2054, p. 397-398.
145. A. J. ... 2055, p. 399-400.
146. A. J. ... 2056, p. 401-402.
147. A. J. ... 2057, p. 403-404.
148. A. J. ... 2058, p. 405-406.
149. A. J. ... 2059, p. 407-408.
150. A. J. ... 2060, p. 409-410.
151. A. J. ... 2061, p. 411-412.
152. A. J. ... 2062, p. 413-414.
153. A. J. ... 2063, p. 415-416.
154. A. J. ... 2064, p. 417-418.
155. A. J. ... 2065, p. 419-420.
156. A. J. ... 2066, p. 421-422.
157. A. J. ... 2067, p. 423-424.
158. A. J. ... 2068, p. 425-426.
159. A. J. ... 2069, p. 427-428.
160. A. J. ... 2070, p. 429-430.
161. A. J. ... 2071, p. 431-432.
162. A. J. ... 2072, p. 433-434.
163. A. J. ... 2073, p. 435-436.
164. A. J. ... 2074, p. 437-438.
165. A. J. ... 2075, p. 439-440.
166. A. J. ... 2076, p. 441-442.
167. A. J. ... 2077, p. 443-444.
168. A. J. ... 2078, p. 445-446.
169. A. J. ... 2079, p. 447-448.
170. A. J. ... 2080, p. 449-450.
171. A. J. ... 2081, p. 451-452.
172. A. J. ... 2082, p. 453-454.
173. A. J. ... 2083, p. 455-456.
174. A. J. ... 2084, p. 457-458.
175. A. J. ... 2085, p. 459-460.
176. A. J. ... 2086, p. 461-462.
177. A. J. ... 2087, p. 463-464.
178. A. J. ... 2088, p. 465-466.
179. A. J. ... 2089, p. 467-468.
180. A. J. ... 2090, p. 469-470.
181. A. J. ... 2091, p. 471-472.
182. A. J. ... 2092, p. 473-474.
183. A. J. ... 2093, p. 475-476.
184. A. J. ... 2094, p. 477-478.
185. A. J. ... 2095, p. 479-480.
186. A. J. ... 2096, p. 481-482.
187. A. J. ... 2097, p. 483-484.
188. A. J. ... 2098, p. 485-486.
189. A. J. ... 2099, p. 487-488.
190. A. J. ... 2100, p. 489-490.
191. A. J. ... 2101, p. 491-492.
192. A. J. ... 2102, p. 493-494.
193. A. J. ... 2103, p. 495-496.
194. A. J. ... 2104, p. 497-498.
195. A. J. ... 2105, p. 499-500.
196. A. J. ... 2106, p. 501-502.
197. A. J. ... 2107, p. 503-504.
198. A. J. ... 2108, p. 505-506.
199. A. J. ... 2109, p. 507-508.
200. A. J. ... 2110, p. 509-510.
201. A. J. ... 2111, p. 511-512.
202. A. J. ... 2112, p. 513-514.
203. A. J. ... 2113, p. 515-516.
204. A. J. ... 2114, p. 517-518.
205. A. J. ... 2115, p. 519-520.
206. A. J. ... 2116, p. 521-522.
207. A. J. ... 2117, p. 523-524.
208. A. J. ... 2118, p. 525-526.
209. A. J. ... 2119, p. 527-528.
210. A. J. ... 2120, p. 529-530.
211. A. J. ... 2121, p. 531-532.
212. A. J. ... 2122, p. 533-534.
213. A. J. ... 2123, p. 535-536.
214. A. J. ... 2124, p. 537-538.
215. A. J. ... 2125, p. 539-540.
216. A. J. ... 2126, p. 541-542.
217. A. J. ... 2127, p. 543-544.
218. A. J. ... 2128, p. 545-546.
219. A. J. ... 2129, p. 547-548.
220. A. J. ... 2130, p. 549-550.
221. A. J. ... 2131, p. 551-552.
222. A. J. ... 2132, p. 553-554.
223. A. J. ... 2133, p. 555-556.
224. A. J. ... 2134, p. 557-558.
225. A. J. ... 2135, p. 559-560.
226. A. J. ... 2136, p. 561-562.
227. A. J. ... 2137, p. 563-564.
228. A. J. ... 2138, p. 565-566.
229. A. J. ... 2139, p. 567-568.
230. A. J. ... 2140, p. 569-570.
231. A. J. ... 2141, p. 571-572.
232. A. J. ... 2142, p. 573-574.
233. A. J. ... 2143, p. 575-576.
234. A. J. ... 2144, p. 577-578.
235. A. J. ... 2145, p. 579-580.
236. A. J. ... 2146, p. 581-582.
237. A. J. ... 2147, p. 583-584.
238. A. J. ... 2148, p. 585-586.
239. A. J. ... 2149, p. 587-588.
240. A. J. ... 2150, p. 589-590.
241. A. J. ... 2151, p. 591-592.
242. A. J. ... 2152, p. 593-594.
243. A. J. ... 2153, p. 595-596.
244. A. J. ... 2154, p. 597-598.
245. A. J. ... 2155, p. 599-600.
246. A. J. ... 2156, p. 601-602.
247. A. J. ... 2157, p. 603-604.
248. A. J. ... 2158, p. 605-606.
249. A. J. ... 2159, p. 607-608.
250. A. J. ... 2160, p. 609-610.
251. A. J. ... 2161, p. 611-612.
252. A. J. ... 2162, p. 613-614.
253. A. J. ... 2163, p. 615-616.
254. A. J. ... 2164, p. 617-618.
255. A. J. ... 2165, p. 619-620.
256. A. J. ... 2166, p. 621-622.
257. A. J. ... 2167, p. 623-624.
258. A. J. ... 2168, p. 625-626.
259. A. J. ... 2169, p. 627-628.
260. A. J. ... 2170, p. 629-630.
261. A. J. ... 2171, p. 631-632.
262. A. J. ... 2172, p. 633-634.
263. A. J. ... 2173, p. 635-636.
264. A. J. ... 2174, p. 637-638.
265. A. J. ... 2175, p. 639-640.
266. A. J. ... 2176, p. 641-642.
267. A. J. ... 2177, p. 643-644.
268. A. J. ... 2178, p. 645-646.
269. A. J. ... 2179, p. 647-648.
270. A. J. ... 2180, p. 649-650.
271. A. J. ... 2181, p. 651-652.
272. A. J. ... 2182, p. 653-654.
273. A. J. ... 2183, p. 655-656.
274. A. J. ... 2184, p. 657-658.
275. A. J. ... 2185, p. 659-660.
276. A. J. ... 2186, p. 661-662.
277. A. J. ... 2187, p. 663-664.
278. A. J. ... 2188, p. 665-666.
279. A. J. ... 2189, p. 667-668.
280. A. J. ... 2190, p. 669-670.
281. A. J. ... 2191, p. 671-672.
282. A. J. ... 2192, p. 673-674.
283. A. J. ... 2193, p. 675-676.
284. A. J. ... 2194, p. 677-678.
285. A. J. ... 2195, p. 679-680.
286. A. J. ... 2196, p. 681-682.
287. A. J. ... 2197, p. 683-684.
288. A. J. ... 2198, p. 685-686.
289. A. J. ... 2199, p. 687-688.
290. A. J. ... 2200, p. 689-690.
291. A. J. ... 2201, p. 691-692.
292. A. J. ... 2202, p. 693-694.
293. A. J. ... 2203, p. 695-696.
294. A. J. ... 2204, p. 697-698.
295. A. J. ... 2205, p. 699-700.
296. A. J. ... 2206, p. 701-702.
297. A. J. ... 2207, p. 703-704.
298. A. J. ... 2208, p. 705-706.
299. A. J. ... 2209, p. 707-708.
300. A. J. ... 2210, p. 709-710.
301. A. J. ... 2211, p. 711-712.
302. A. J. ... 2212, p. 713-714.
303. A. J. ... 2213, p. 715-716.
304. A. J. ... 2214, p. 717-718.
305. A. J. ... 2215, p. 719-720.
306. A. J. ... 2216, p. 721-722.
307. A. J. ... 2217, p. 723-724.
308. A. J. ... 2218, p. 725-726.
309. A. J. ... 2219, p. 727-728.
310. A. J. ... 2220, p. 729-730.
311. A. J. ... 2221, p. 731-732.
312. A. J. ... 2222, p. 733-734.
313. A. J. ... 2223, p. 735-736.
314. A. J. ... 2224, p. 737-738.
315. A. J. ... 2225, p. 739-740.
316. A. J. ... 2226, p. 741-742.
317. A. J. ... 2227, p. 743-744.
318. A. J. ... 2228, p. 745-746.
319. A. J. ... 2229, p. 747-748.
320. A. J. ... 2230, p. 749-750.
321. A. J. ... 2231, p. 751-752.
322. A. J. ... 2232, p. 753-754.
323. A. J. ... 2233, p. 755-756.
324. A. J. ... 2234, p. 757-758.
325. A. J. ... 2235, p. 759-760.
326. A. J. ... 2236, p. 761-762.
327. A. J. ... 2237, p. 763-764.
328. A. J. ... 2238, p. 765-766.
329. A. J. ... 2239, p. 767-768.
330. A. J. ... 2240, p. 769-770.
331. A. J. ... 2241, p. 771-772.
332. A. J. ... 2242, p. 773-774.
333. A. J. ... 2243, p. 775-776.
334. A. J. ... 2244, p. 777-778.
335. A. J. ... 2245, p. 779-780.
336. A. J. ... 2246, p. 781-782.
337. A. J. ... 2247, p. 783-784.
338. A. J. ... 2248, p. 785-786.
339. A. J. ... 2249, p. 787-788.
340. A. J. ... 2250, p. 789-790.
341. A. J. ... 2251, p. 791-792.
342. A. J. ... 2252, p. 793-794.
343. A. J. ... 2253, p. 795-796.
344. A. J. ... 2254, p. 797-798.
345. A. J. ... 2255, p. 799-800.
346. A. J. ... 2256, p. 801-802.
347. A. J. ... 2257, p. 803-804.
348. A. J. ... 2258, p. 805-806.
349. A. J. ... 2259, p. 807-808.
350. A. J. ... 2260, p. 809-810.
351. A. J. ... 2261, p. 811-812.
352. A. J. ... 2262, p. 813-814.
353. A. J. ... 2263, p. 815-816.
354. A. J. ... 2264, p. 817-818.
355. A. J. ... 2265, p. 819-820.
356. A. J. ... 2266, p. 821-822.
357. A. J. ... 2267, p. 823-824.
358. A. J. ... 2268, p. 825-826.
359. A. J. ... 2269, p. 827-828.
360. A. J. ... 2270, p. 829-830.
361. A. J. ... 2271, p. 831-832.
362. A. J. ... 2272, p. 833-834.
363. A. J. ... 2273, p. 835-836.
364. A. J. ... 2274, p. 837-838.
365. A. J. ... 2275, p. 839-840.
366. A. J. ... 2276, p. 841-842.
367. A. J. ... 2277, p. 843-844.
368. A. J. ... 2278, p. 845-846.
369. A. J. ... 2279, p. 847-848.
370. A. J. ... 2280, p. 849-850.
371. A. J. ... 2281, p. 851-852.
372. A. J. ... 2282, p. 853-854.
373. A. J. ... 2283, p. 855-856.
374. A. J. ... 2284, p. 857-858.
375. A. J. ... 2285, p. 859-860.
376. A. J. ... 2286, p. 861-862.
377. A. J. ... 2287, p. 863-864.
378. A. J. ... 2288, p. 865-866.
379. A. J. ... 2289, p. 867-868.
380. A. J. ... 2290, p. 869-870.
381. A. J. ... 2291, p. 871-872.
382. A. J. ... 2292, p. 873-874.
383. A. J. ... 2293, p. 875-876.
384. A. J. ... 2294, p. 877-878.
385. A. J. ... 2295, p. 879-880.
386. A. J. ... 2296, p. 881-882.
387. A. J. ... 2297, p. 883-884.
388. A. J. ... 2298, p. 885-886.
389. A. J. ... 2299, p. 887-888.
390. A. J. ... 2300, p. 889-890.
391. A. J. ... 2301, p. 891-892.
392. A. J. ... 2302, p. 893-894.
393. A. J. ... 2303, p. 895-896.
394. A. J. ... 2304, p. 897-898.
395. A. J. ... 2305, p. 899-900.
396. A. J. ... 2306, p. 901-902.
397. A. J. ... 2307, p. 903-904.
398. A. J. ... 2308, p. 905-906.
399. A. J. ... 2309, p. 907-908.
400. A. J. ... 2310, p. 909-910.
401. A. J. ... 2311, p. 911-912.
402. A. J. ... 2312, p. 913-914.
403. A. J. ... 2313, p. 915-916.
404. A. J. ... 2314, p. 917-918.
405. A. J. ... 2315, p. 919-920.
406. A. J. ... 2316, p. 921-922.
407. A. J. ... 2317, p. 923-924.
408. A. J. ... 2318, p. 925-926.
409. A. J. ... 2319, p. 927-928.
410. A. J. ... 2320, p. 929-930.
411. A. J. ... 2321, p. 931-932.
412. A. J. ... 2322, p. 933-934.
413. A. J. ... 2323, p. 935-936.
414. A. J. ... 2324, p. 937-938.
415. A. J. ... 2325, p. 939-940.
416. A. J. ... 2326, p. 941-942.
417. A. J. ... 2327, p. 943-944.
418. A. J. ... 2328, p. 945-946.
419. A. J. ... 2329, p. 947-948.
420. A. J. ... 2330, p. 949-950.
421. A. J. ... 2331, p. 951-952.
422. A. J. ... 2332, p. 953-954.
423. A. J. ... 2333, p. 955-956.
424. A. J. ... 2334, p. 957-958.
425. A. J. ... 2335, p. 959-960.
426. A. J. ... 2336, p. 961-962.
427. A. J. ... 2337, p. 963-964.
428. A. J. ... 2338, p. 965-966.
429. A. J. ... 2339, p. 967-968.
430. A. J. ... 2340, p. 969-970.
431. A. J. ... 2341, p. 971-972.
432. A. J. ... 2342, p. 973-974.
433. A. J. ... 2343, p. 975-976.
434. A. J. ... 2344, p. 977-978.
435. A. J. ... 2345, p. 979-980.
436. A. J. ... 2346, p. 981-982.
437. A. J. ... 2347, p. 983-984.
438. A. J. ... 2348, p. 985-986.
439. A. J. ... 2349, p. 987-988.
440. A. J. ... 2350, p

REPREZENTAREA ALGEBREI $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ ÎNTR-O ALGEBRĂ DE OPERATORI DINTR-UN SPAȚIU HILBERT

ION COLOJOARĂ

Introducere

Fie $\mathcal{H}$ și $\mathcal{I}$ două spații Hilbert, $W: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{I}$ o aplicație parțial izometrică, iar $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ algebra Banach considerată de Prof. Al. Ghika [2]. Prin $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ s-a notat mulțimea $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ a operațiilor lineare și mărginite definite pe $\mathcal{H}$ și cu valori în $\mathcal{I}$ organizată ca o algebră cu legea de compoziție $(S, T) \rightarrow S \times T$ ($S \times T = SW^*T$).

În această notă vom arăta că algebra $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ este complet regulată, de unde va rezulta, aplicînd o teoremă a lui Ghelfand și Naimark [1], că este complet izomorfă cu o algebră de operatori mărginiți dintr-un spațiu Hilbert, spațiu care-l vom construi.

§ 1. Regularitatea algebrei

În cele ce urmează vom presupune că elementele $T \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ satisfac condițiile :

$$(\Omega) \quad T = WW^*T = TW^*W \quad (T = W \times T = T \times W)$$

Aceste condiții intervin în definiția operațiilor W-hermitiene, W-auto adjuncte etc. Dacă aceste condiții sînt îndeplinite, operația W poate fi considerată ca element unitate în algebra $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$.

Murray a arătat ([3] teorema 1.14) că dacă T este o operație închisă definită pe un subspațiu dens $D_T \subset \mathcal{H}$ și cu valori în $\mathcal{I}$, atunci există o operație închisă T^* definită pe un subspațiu dens $D_{T^*} \subset \mathcal{I}$ și cu valori în $\mathcal{H}$, astfel încît

$$(Tx|y) = (x|T^*y), \text{ oricare ar fi } x \in D_T \text{ și } y \in D_{T^*}. \quad (1.1)$$

Dacă $T \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ relația (1.1) se păstrează oricare ar fi $x \in \mathcal{H}$ și $y \in \mathcal{I}$.

Lema 1. Fie $T \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$, atunci $T \neq 0$ dacă și numai dacă $T^* \neq 0$.

Demonstrație. Dacă presupunem $T \neq 0$, iar prin absurd $T^* = 0$, atunci din 1.1 rezultă

$$(Tx|y)_J = 0, \text{ oricare ar fi } (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{J},$$

de unde

$$Tx = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathcal{H},$$

adică

$$T = 0;$$

ceea ce contrazice ipoteza $T \neq 0$.

Implicația inversă se demonstrează la fel.

Notînd cu $\mathcal{W}_{i,W}$ (resp. $\mathcal{W}_{i,W^*}$) varietatea inițială lui W (resp. W^*) și cu $\mathcal{W}_{f,W}$ (resp. $\mathcal{W}_{f,W^*}$) varietatea finală a lui W (resp. W^*) avem

$$\begin{cases} \mathcal{W}_{i,W} = \mathcal{W}_{f,W^*} (\subset \mathcal{H}) \\ \mathcal{W}_{f,W} = \mathcal{W}_{i,W^*} (\subset \mathcal{J}) \end{cases} \quad (1.2)$$

Lema 2. Dacă $T \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ și $T \neq 0$, atunci

$$(a) (T(\mathcal{H}) - \{0_J\}) \cap \mathcal{W}_{i,W^*} \neq \emptyset$$

și

$$(b) (T^*(\mathcal{J}) - \{0_{\mathcal{H}}\}) \cap \mathcal{W}_{i,W} \neq \emptyset$$

Demonstrație. Presupunînd $(T(\mathcal{H}) - \{0_J\}) \cap \mathcal{W}_{i,W^*} = \emptyset$ rezultă

$$T(\mathcal{H}) - \{0_J\} \subset \mathbb{C} \mathcal{W}_{i,W^*}$$

Aplicînd W^* , obținem

$$W^*(T(\mathcal{H}) - \{0_J\}) \subset W^*(\mathbb{C} \mathcal{W}_{i,W^*}) = \{0_{\mathcal{H}}\},$$

deci

$$W^*T = 0,$$

prin urmare

$$WW^*T = 0,$$

de unde, în baza cerinței (Ω) rezultă $T = 0$; ceea ce contrazice ipoteza $T \neq 0$.

La fel se arată (b)

În [2] definiția 3.4 pentru orice operație $T \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ s-a definit operația asociată $T^\circ = WT^*W$. Aplicația $T \rightarrow T^\circ$ reprezintă o involuție pe $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{J})$.

Lema 3. Dacă $T \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ și $T \neq 0$, atunci

- 1) $T^*T \neq 0$,
- 2) $T^\circ \neq 0$,
- 3) $T^\circ \times T \neq 0$.

Demonstrație. 1) Presupunînd $T^*T = 0$, rezultă că pentru orice $x \in \mathcal{H}$ avem

$$0 = (T^*Tx|x) = (Tx|Tx) = \|Tx\|^2,$$

deci $Tx = 0_I$; ceea ce contrazice ipoteza $T \neq 0$.

2) Din lema 2 (b) rezultă că $WT^*(\mathcal{I}) \neq \{O_i\}$, avînd și $W(\mathcal{H}) = \mathcal{I}$, deducem $WT^*W(\mathcal{H}) \neq \{O_i\}$, adică $T^0(\mathcal{H}) = \{O_i\}$.

3) Presupunînd $T^0 \times T = 0$ și avînd $T^0 \times T = T^0 W^* T = WT^* W W^* T = WT^* T$, rezultă că pentru orice $x \in \mathcal{H}$ avem

$$0 = ||WT^*Tx|| = ||T^*Tx||,$$

deci $T^*Tx = 0$; ceea ce contrazice 2).

Teorema 1. Pentru orice $T \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ avem

$$||T^0 \times T|| = ||T||^2, \quad (1.3)$$

adică algebra $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ este complet regulată.

Demonstrație. Notînd cu „+” involuția în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ avem relația

$$(W^*T)^+ = T^*W, \text{ oricare ar fi } T \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I}).$$

Avem

$$\begin{aligned} ||Tx||^2 &= (Tx|Tx) = (W^*Tx|W^*Tx) = ((W^*T)^+ W^*Tx|x) = \\ &= (T^*WW^*Tx|x) = (WT^*WW^*Tx|Wx) = (T^0 \times Tx|Wx) \leq \\ &\leq ||T^0 \times Tx|| \cdot ||Wx|| = ||T^0 \times Tx|| \cdot ||x|| \end{aligned}$$

de unde

$$||T||^2 = \sup_{\substack{x \in \mathcal{H} \\ x \neq 0}} \frac{||Tx||^2}{||x||^2} \leq \sup_{\substack{x \in \mathcal{H} \\ x \neq 0}} \frac{||T^0 \times Tx|| \cdot ||x||}{||x||^2} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{H} \\ x \neq 0}} \frac{||T^0 \times Tx||}{||x||} = ||T^0 \times T||. \quad (1.4)$$

Observăm că

$$||T^0|| = ||WT^*W|| = ||T^*W|| = ||(W^*T)^+|| = ||W^*T|| = ||T||. \quad (1.5)$$

Din proprietățile normei într-o algebră normată și din (1.5) rezultă

$$||T^0 \times T|| \leq ||T^0|| \cdot ||T|| = ||T||^2. \quad (1.6)$$

Din (1.4) și (1.6) rezultă (1.3).

Algebra $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ fiind complet regulată, este, conform unei teoreme a lui Ghelfand și Naimark ([4], cap. V, § 24, nr. 2 teorema 5) complet izomorfă cu o algebră de operatori mărginiți dintr-un spațiu Hilbert H .

§ 2. Construirea spațiului H .

Definiție. O formă lineară $f: \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I}) \rightarrow \mathbb{C}$ se numește pozitivă dacă

$$f(T^0 \times T) \geq 0, \text{ oricare ar fi } T \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$$

Notăm cu $\mathcal{F}_+$ mulțimea formelor lineare pozitive definite pe $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$.

Pentru fiecare $f \in \mathcal{F}_+$ definim pe $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ o formă hermitiană

$$h_f(T, S) = f(S^0 \times T). \quad (2.1)$$

Avem

$$\begin{aligned} h_f(T, S) &= f(S^\circ \times T) = \overline{f((S^\circ \times T)^\circ)} = f(T^\circ \times S) = \overline{h_f(S, T)}, \\ h_f(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, S) &= f(S^\circ \times (\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)) = \lambda_1 f(S^\circ \times T_1) + \lambda_2 f(S^\circ \times T_2) = \lambda_1 h_f(T_1, S) + \\ &\quad + \lambda_2 h_f(T_2, S), \\ h_f(T, T) &= f(T^\circ \times T) \geq 0. \end{aligned}$$

Notăm

$$I_f = \{T \mid h_f(T, T) = 0\}. \quad (2.2)$$

I_f este un ideal la stînga. Pentru aceasta să observăm mai întîi că dacă $T \in I_f$ și $S \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$, atunci

$$f(T \times S) = 0 \quad (2.3)$$

Aceasta rezultă din inegalitatea lui Schwartz-Buniakovski pentru forme lineare pozitive definite pe algebre involutive

$$|f(T \times S)|^2 \leq f(T^\circ \times T) f(S^\circ \times S), \quad (3.4)$$

căci $f(T^\circ \times T) = h_f(T, T) = 0$.

$$I_f + I_f \subset I_f$$

Fie $S_1, S_2 \in I_f$, atunci

$$\begin{aligned} h_f(S_1 + S_2, S_1 + S_2) &= f((S_1 + S_2)^\circ \times (S_1 + S_2)) = f(S_1^\circ \times S_1) + f(S_1^\circ \times S_2) + f(S_2^\circ \times S_1) + \\ &\quad + f(S_2^\circ \times S_2) = 0, \end{aligned}$$

fiindcă

$$S_i \in I_f \text{ implică } f(S_i^\circ \times S_i) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

și (conf. (2.3))

$$f(S_i^\circ \times S_j) = 0 \quad (i = 1, 2; j = 1, 2; i \neq j),$$

deci

$$S_1 + S_2 \in I_f$$

$S \times I_f \subset I_f$, oricare ar fi $S \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$.

Fie $S \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ și $T \in I_f$, atunci notînd cu $R = T^\circ \times S^\circ \times S \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$, obținem (conform (2.3))

$$h_f(S \times T, S \times T) = f((S \times T)^\circ \times (S \times T)) = f(T^\circ \times S^\circ \times S \times T) = f(R \times T) = 0,$$

deci

$$S \times T \in I_f.$$

Așadar I_f este un ideal la stînga.

Fie $\{T\}_f$ ⁽¹⁾ clasa de echivalență a operației T modulo I_f și $H_f = \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})|_{I_f}$ mulțimea acestor clase.

¹ Vom utiliza indicele f numai acolo unde lipsa lui ar putea produce confuzii, în genera vom scrie simplu $\{T\}$.

Forma hermitiană h_f generează pe H_f un produs scalar.

$$(\{T\} | \{S\})_f = h_f(T, S) = f(S^\circ \times T).$$

Din $T_1, T_2 \in \{T\}$ rezultă $T_1 - T_2 \in I_f$ și

$$h_f(T_1, S) = h_f(T_2, S) = h_f(T_1 - T_2, S) = f(S^\circ \times (T_1 - T_2)) = 0,$$

adică

$$h_f(T_1, S) = h_f(T_2, S),$$

deci produsul scalar $(\{T\} | \{S\})_f$ nu depinde de reprezentantul $T \in \{T\}$. Analog se arată că $(\{T\} | \{S\})_f$ nu depinde de $S \in \{S\}$.

Fie $\tilde{H}_f$ completatul lui H_f față de produsul scalar $(\{T\} | \{S\})_f$.

Se poate construi o reprezentare a algebrei $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ în algebra $\mathcal{L}(\tilde{H}_f)$. Într-adevăr, pentru $\{T\} \in \tilde{H}_f$ și $S \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ clasa de reprezentant $S \times T$ nu depinde de reprezentantul $T \in \{T\}$, ci numai de clasa $\{T\}$. Pentru aceasta fie $T_1, T_2 \in \{T\}$, atunci $T_1 - T_2 \in I_f$ și

$$S \times T_1 - S \times T_2 = S \times (T_1 - T_2) \in I_f \quad (\text{căci } S \times I_f \subset I_f),$$

deci $\{S \times T\}$ nu depinde de $T \in \{T\}$.

Să notăm cu A_S^f operatorul

$$\{T\} \rightarrow \{S \times T\}.$$

$A_S^f \in \mathcal{L}(\tilde{H}_f)$, oricare ar fi $S \in \mathcal{L}_W(\mathcal{H}, \mathcal{I})$.

A_S^f este liniar. Fie $\{T_i\} \in \tilde{H}_f$ și $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2$), atunci

$$\begin{aligned} A_S^f(\lambda_1 \{T_1\} + \lambda_2 \{T_2\}) &= A_S^f(\{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2\}) = \{S \times (\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)\} = \lambda_1 \{S \times T_1\} + \lambda_2 \{S \times T_2\} = \\ &= \lambda_1 A_S^f(\{T_1\}) + \lambda_2 A_S^f(\{T_2\}). \end{aligned}$$

A_S^f este mărginit. Fie $T, R \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$. Notăm

$$f_T(R) = f(T^\circ \times R \times T)$$

Observăm că

$$f_T(R^\circ \times R) = f(T^\circ \times R^\circ \times R \times T) = f((R \times T)^\circ \times (R \times T)) \geq 0.$$

Se știe ([4], cap. II, § 10, nr. 4) că pentru orice formă lineară pozitivă g definită pe o algebră Banach involutivă cu element unitate e , are loc inegalitatea

$$|g(x)| \leq g(e) \|x\|.$$

În cazul nostru avem

$$|f_T(R)| \leq f_T(W) \|R\|.$$

Pentru $R = S^\circ \times S$, obținem

$$|f_T(S^\circ \times S)| \leq f_T(W) \|S^\circ \times S\| = f_T(W) \|S\|^2,$$

sau

$$|f(T^\circ \times S^\circ \times S \times T)| \leq f(T^\circ \times W \times T) \|S\|^2 = f(T^\circ W^* W W^* T) \|S\|^2 = f(T^\circ \times T) \|S\|^2.$$

Ținând seama de această inegalitate, putem scrie

$$\begin{aligned} ||\mathbf{A}_S^f\{T\}||_f^2 &= (\mathbf{A}_S^f\{T\} | \mathbf{A}_S^f\{T\})_f = h_f(S \times T, S \times T) = f((S \times T)^\circ \times (S \times T)) = \\ &= f(T^\circ \times S^\circ \times S \times T) \leq f(T^\circ \times T) ||S||^2 = h_f(T, T) ||S||^2 = (\{T\} | \{T\})_f ||S||^2 = \\ &= ||\{T\}||_f^2 \cdot ||S||^2, \end{aligned}$$

de unde

$$||\mathbf{A}_S^f|| \leq ||S||.$$

Aplicația $S \rightarrow \mathbf{A}_S^f$ este o reprezentare involutivă a algebrei $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ în algebra $\mathcal{L}(\tilde{H}_f)$.

Într-adevăr, aplicația $S \rightarrow \mathbf{A}_S^f$ este lineară.

$$\mathbf{A}_{\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2}^f\{T\} = \{(\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2) \times T\} = \lambda_1 \{S_1 \times T\} + \lambda_2 \{S_2 \times T\} = \lambda_1 \mathbf{A}_{S_1}^f\{T\} + \lambda_2 \mathbf{A}_{S_2}^f\{T\}.$$

Aplicația $S \rightarrow \mathbf{A}_S^f$ este multiplicativă

$$\mathbf{A}_{S_1 \times S_2}^f\{T\} = \{S_1 \times S_2 \times T\} = \mathbf{A}_{S_1}^f\{S_2 \times T\} = \mathbf{A}_{S_1}^f \mathbf{A}_{S_2}^f\{T\}.$$

Aplicația $S \rightarrow \mathbf{A}_S^f$ este involutivă (păstrează involuția)

$$(\mathbf{A}_S^f\{T\} | \{Q\})_f = (\{S \times T\} | \{Q\}) = h_f(S \times T, Q) = f(Q^\circ \times S \times T),$$

$$(\{T\} | \mathbf{A}_{S^\circ}^f\{Q\})_f = (\{T\} | \{S^\circ \times Q\})_f = h_f(T, S^\circ \times Q) = f((S^\circ \times Q)^\circ \times T) = f(Q^\circ \times S \times T),$$

deci

$$(\mathbf{A}_S^f\{T\} | \{Q\})_f = \{T\} | \mathbf{A}_{S^\circ}^f\{Q\})_f,$$

adică

$$\mathbf{A}_{S^\circ}^f = (\mathbf{A}_S^f)^\# \quad (1)$$

Fie $H = \bigoplus_{f \in \mathcal{F}_+} \tilde{H}_f$ suma directă a spațiilor $\tilde{H}_f$, adică mulțimea elementelor $\{T\} = (\{T\}_f)_{f \in \mathcal{F}_+}$ cu proprietatea

$$||\{T\}||^2 = \sum_{f \in \mathcal{F}_+} ||\{T\}_f||_f^2 < \infty.$$

În H definim operatorul $\mathbf{A}_S\{T\} = (\mathbf{A}_S^f\{T\}_f)_{f \in \mathcal{F}_+}$.

Notăm

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_S = (\mathbf{A}_S^f)_{f \in \mathcal{F}_+} \mid ||\mathbf{A}_S^f|| \leq M_S < \infty, S \in \mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})\}.$$

(1) Cu „#” am notat involuția în algebra $\mathcal{L}(\tilde{H}_f)$.

$\mathcal{A}$ este o subalgebră a algebrei $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{A}_{s_1} + \mathbf{A}_{s_2})\{\mathbf{T}\}\|^2 &= \sum_{f \in \mathcal{F}_+} \|(\mathbf{A}_{s_1}^f + \mathbf{A}_{s_2}^f)\{\mathbf{T}\}_f\|_f^2 \leq \sum_{f \in \mathcal{F}_+} (\|\mathbf{A}_{s_1}^f\{\mathbf{T}\}_f\|_f + \|\mathbf{A}_{s_2}^f\{\mathbf{T}\}_f\|_f)^2 \leq \\ &\leq \sum_{f \in \mathcal{F}_+} \|\{\mathbf{T}\}_f\|_f^2 (\|\mathbf{A}_{s_1}^f\| + \|\mathbf{A}_{s_2}^f\|)^2 \leq (M_{s_1} + M_{s_2})^2 \|\{\mathbf{T}\}\|^2, \end{aligned}$$

de unde

$$\|\mathbf{A}_{s_1} + \mathbf{A}_{s_2}\| \leq M_{s_1} + M_{s_2}.$$

Avem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{s_1} \mathbf{A}_{s_2} \{\mathbf{T}\}\|^2 &= \sum_{f \in \mathcal{F}_+} \|\mathbf{A}_{s_1}^f \mathbf{A}_{s_2}^f \{\mathbf{T}\}_f\|_f^2 \leq \sum_{f \in \mathcal{F}_+} \|\mathbf{A}_{s_1}^f\|_f^2 \cdot \|\mathbf{A}_{s_2}^f\|_f^2 \cdot \|\{\mathbf{T}\}_f\|_f^2 \leq \\ &\leq (M_{s_1} M_{s_2})^2 \|\{\mathbf{T}\}\|^2, \end{aligned}$$

de unde

$$\|\mathbf{A}_{s_1} \mathbf{A}_{s_2}\| \leq M_{s_1} M_{s_2}.$$

În fel

$$\|\lambda \mathbf{A}_S\| \leq |\lambda| M_S.$$

Din

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_S \{\mathbf{T}\}\|^2 &= \sum_{f \in \mathcal{F}_+} \|\mathbf{A}_S^f \{\mathbf{T}\}_f\|_f^2 \leq \sum_{f \in \mathcal{F}_+} \|\mathbf{A}_S^f\|_f^2 \cdot \|\{\mathbf{T}\}_f\|_f^2 \leq \\ &\leq \|S\|_f^2 \sum_{f \in \mathcal{F}_+} \|\{\mathbf{T}\}_f\|_f^2 = \|S\|_f^2 \|\{\mathbf{T}\}\|^2, \end{aligned}$$

rezultă

$$\|\mathbf{A}_S\| \leq \|S\|.$$

Se arată la fel ca mai sus că aplicația $S \rightarrow \mathbf{A}_S$ este o reprezentare a algebrei $\mathcal{L}_{\mathcal{W}^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ pe algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Această reprezentare este suma directă a reprezentărilor $S \rightarrow \mathbf{A}_S^f$. Mai mult, vom arăta că aplicația $S \rightarrow \mathbf{A}_S$ este un izomorfism. Într-adevăr, din

$$\mathbf{A}_S = 0$$

rezultă

$$\mathbf{A}_S \circ \mathbf{A}_S = \mathbf{A}_S \mathbf{A}_S = 0,$$

adică

$$\mathbf{A}_S^f \circ \mathbf{A}_S = 0, \text{ oricare ar fi } f \in \mathcal{F}_+,$$

de unde

$$\Lambda_{S^\circ \times S}^f \{T\}_f | \{Q\}_f = 0, \text{ oricare ar fi } \{T\}_f, \{Q\}_f \in \tilde{H}_f.$$

În particular, pentru $\{T\}_f = \{Q\}_f = \{W\}_f$, obținem

$$0 = (\Lambda_{S^\circ \times S}^f \{W\}_f | \{W\}_f)_f = ((S^\circ \times S) \times W)_f | \{W\}_f)_f = (S \times W)_f | (S \times W)_f)_f = (\{S\}_f | \{S\}_f)_f = f(S^\circ \times S),$$

oricare ar fi $f \in \mathcal{F}_+$, deci S aparține idealului reductor al algebrei $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$. Algebra $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ fiind redusă (vom arăta mai jos acest lucru), adică idealul reductor este format numai din elementul nul al algebrei, rezultă că $S = 0$.

Pentru a arăta că algebra $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ este redusă, vom aminti unele definiții și vom enunța unele propoziții din teoria algebrelor Banach.

Definiția 1. Fie X o algebră Banach involutivă, $\mathcal{F}_+$ mulțimea formelor lineare pozitive definite pe X . Mulțimea

$$I = \{x | f(x^*x) = 0, \text{ oricare ar fi } f \in \mathcal{F}_+\}$$

se numește idealul reductor al algebrei.

Definiția 2. Intersecția tuturor idealelor la stînga maximale, care coincide cu intersecția tuturor idealelor la dreapta maximale, se numește radicalul algebrei și-l vom nota cu $\mathcal{R}$. Dacă $\mathcal{R} = \{0\}$ atunci algebra se numește semi-simplă.

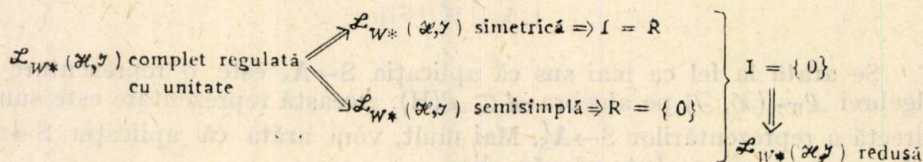
Definiția 3. O algebră Banach involutivă X se numește simetrică (complet simetrică în terminologia lui Ghelfend și Naimark) dacă $(e + x^*x)^{-1}$ există pentru orice $x \in X$.

Propoziția 1. ([4], cap. V § 24. I) Orice algebră Banach complet regulată este semisimplă.

Propoziția 2. ([4] cap. V § 24, teorema 4). Orice algebră Banach complet regulată cu unitate este simetrică.

Propoziția 3. ([4] cap. X § 23, nr. 3. II). Radicalul unei algebre simetrice coincide cu idealul său reductor.

Au loc următoarele implicații



În $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ vom introduce

$$||S||_{\min} = ||\Lambda_S||.$$

Notăm cu $\mathcal{B}$ completata algebrei $\mathcal{L}_{W^*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ față de norma $||S||_{\min}$. $||S||_{\min}$ este o normă regulată minimală. Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{F}_+$ atunci

$$\begin{aligned}
 |f(S)| &= |(\Lambda_S^f \{W\}_f | \{W\}_f)_f| \leq ||\Lambda_S^f \{W\}_f||_f \cdot ||\{W\}_f|| \leq ||\Lambda_S^f|| \cdot ||\{W\}_f||_f^2 = \\
 &= ||S||_{\min} \cdot h_f(W, W) = ||S||_{\min} \cdot f(W^\circ \times W) = ||S||_{\min} \cdot f(W),
 \end{aligned}$$

deci f este continuă față de norma $\|S\|_{\min}$, prin urmare poate fi prelungită în mod unic la o formă lineară pozitivă în $\mathcal{B}$, adică norma $\|S\|_{\min}$ este regulată. În baza corolarului teoremei 1 ([4], cap. IV, § 18, nr. 3) norma $\|S\|_{\min}$ este complet regulată, deci algebra $\mathcal{B}$ este complet regulată.

Se știe ([4], cap. IV, § 18, nr. 3, teorema 2) că pentru o normă regulată minimală are loc egalitatea

$$\|x\|^2 = \sup_{f(e)=1} f(x^*x).$$

În cazul nostru

$$\|S\|_{\min}^2 = \sup_{f(W)=1} f(S^\circ \times S)$$

Pe de altă parte, algebra $\mathcal{B}$ fiind complet regulată, deci simetrică, conform teoremei lui Raikov [5]

Vom avea

$$\sup_{f(W)=1} f(S^\circ \times S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|(S^\circ \times S)^n\|}.$$

Așadar

$$\begin{aligned} \|S\|_{\min}^2 &= \sup_{f(W)=1} f(S^\circ \times S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|(S^\circ \times S)^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|(S^\circ \times S)^{2^n}\|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{\|S^\circ \times S\|^{2^n}} = \|S^\circ \times S\| = \|S\|^2, \end{aligned}$$

deci norma regulată minimală coincide cu norma inițială, prin urmare

$$\|S\| = \|S\|_{\min} = \|A_S\|,$$

adică aplicația $S \rightarrow A_S$ este o izometrie.

Am arătat, deci, că algebra $\mathcal{L}_{W*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ este complet izomorfă cu algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$, adică între $\mathcal{L}_{W*}(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ și $\mathcal{A}$ există în izomorfism algebric, involutiv și izometric.

BIBLIOGRAFIE

1. Гельфанд И. М. и Наймарк М. А.: О включений нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве. Матем. сб. 12 (54) (1953), 197—213.
2. Idem A.: Кольца с инволюцией и их представления. Известия А. Н. СССР сер. матем. 12 (1948), 445—480.
3. Ghika A.: Décompositions spectrales généralisées des transformations linéaires d'un espace hilbertien dans un autre. Revue de Mathématique pures et appliquées. tome II (1957), 61—111.
4. Murray F. J.: Linear transformations between Hilbert spaces and the applications of this theory to linear partial differential equations. Trans. Am. Math. Soc. 37, 1935, 301—338.
5. Наймарк М. А.: Нормированные кольца. Москва 1956.
6. Райков Д. А.: К теории нормированных колец с инволюцией. ДАН СССР 54 (1946), 391—394.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБРЫ $\mathcal{L}_W^*(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ В АЛГЕБРЕ ОПЕРАТОРОВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В § 1 указывается, что алгебра $\mathcal{L}_W^*(\mathcal{H}, \mathcal{I})$, рассматриваемая в [3] проф. Ал. Гика, является вполне регулярной, откуда следует, на основании теоремы Гельфанда и Наймарка [1], что эта алгебра является вполне изоморфной с алгеброй ограниченных операторов Гильбертова пространства $\mathcal{H}$. В § 2 строится пространство $\mathcal{H}$.

LA REPRÉSENTATION DE L'ALGÈBRE $\mathcal{L}_W^*(\mathcal{H}, \mathcal{I})$ DANS UNE ALGÈBRE D'OPÉRATEURS D'UN ESPACE HILBERT

RÉSUMÉ

On démontre dans cette note que l'algèbre $\mathcal{L}_W^*(\mathcal{H}, \mathcal{I})$, considérée dans (3) par le professeur Al. Ghika, est complètement réglée. Il en résulte, sur la base d'un théorème de Gelfand et Neumark (1), qu'elle est complètement isomorphe à l'algèbre d'opérateurs bornés dans un espace Hilbert, $\mathcal{H}$.

Dans le paragraphe 2 on construit l'espace $\mathcal{H}$.

SEMI-TOPOLOGIA GRUPURILOR DE TRANSFORMĂRI*

ALEXANDRU SOLIAN

Într-o lucrare anterioară [7], am arătat că, fiind dată o mulțime M și un grup $\mathcal{K}$ de transformări ale lui M , între mulțimea parțial ordonată $\delta(M)$ a relațiilor de echivalență ale lui M și mulțimea parțial ordonată a subgrupurilor lui $\mathcal{K}$ (cele două mulțimi sînt chiar latici complete față de ordinea parțială respectivă), există o corespondență Galois duală (inversă) (pentru definirea acestei noțiuni a se vedea [1]). (În cazul particular în care $\mathcal{K}$ este grupul $\mathfrak{T}(M)$ al tuturor transformărilor lui M , teorema a fost dată de Everett [2]). Conform cu O. Ore [5], se numește *închidere* într-o mulțime parțial ordonată S o aplicație $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ a lui S în S , $\sigma, \bar{\sigma} \in S$, pentru care

- 1) $\sigma \leq \bar{\sigma}$;
- 2) $\sigma \leq \tau$ implică $\bar{\sigma} \leq \bar{\tau}$;
- 3) $\bar{\bar{\sigma}} = \sigma$.

Din lucrările lui Ore [5] și Everett [2] rezultă că într-o corespondență Galois duală între două mulțimi parțial ordonate, iterarea de două ori a aplicației, determină în una dintre mulțimi și numai într-una, o închidere. În corespondența de care a fost vorba mai sus, închiderea se obține în mulțimea subgrupurilor lui $\mathcal{K}$.

În lucrarea de față se introduce în grupul $\mathcal{K}$ o topologie slăbită, numită *semi-topologie*, față de care operația de înmulțire și de luare a inversului în $\mathcal{K}$ să fie continue, și pentru care închiderea unui subgrup $\mathfrak{B} \subset \mathcal{K}$, în sensul semi-topologiei introduse să coincidă cu închiderea lui $\mathfrak{B}$ în sensul corespondenței Galois duale. Se mai dau și o serie de proprietăți suplimentare.

1°. Fie M o mulțime nevidă și fie $\mathcal{K}$ un grup de transformări ale lui M . Dacă $\mathfrak{B}$ este un subgrup al lui $\mathcal{K}$, atunci relația binară $\sim(\mathfrak{B}) = \sim$, definită în M prin

* Lucrarea a fost comunicată la Simpozionul de topologie, Praga, 1961 și va apărea în rezumat în Actele Simpozionului; aici ea este expusă în întregime, inclusiv cu demonstrațiile, care nu au fost date acolo.

$a \sim b \iff$ există $\tau, \tau \in \mathcal{U}$, astfel încît $\tau(a) = b$
unde $a, b \in M$, este o relație de echivalență în M (a se vedea [1]),
numită *echivalența asociată* lui $\mathcal{B}$. Dacă $\sim$ este o relație de echivalență în
 M , atunci submulțimea $\mathcal{B}(\sim) = \mathcal{L}$ a lui $\mathcal{U}$, definită prin

$$\mathcal{L} = \{\tau \mid \tau \in \mathcal{U}, \tau(x) \sim x, \text{ pentru orice } x \in M\}$$

este un subgrup al lui $\mathcal{U}$ (a se vedea [1]), numit *subgrupul asociat* lui $\sim$.

Considerînd în mulțimea $\mathcal{S}(M)$ a relațiilor de echivalență din M ordinea parțială „ $\leq$ ” dată de

$\sim_1 \leq \sim_2 \iff a \sim_1 b$ implică $a \sim_2 b, a, b \in M$ unde $\sim_1, \sim_2 \in \mathcal{S}(M)$,
iar în mulțimea subgrupurilor lui $\mathcal{U}$, ordinea parțială dată de incluziune,
avem, conform [7], teorema¹:

Aplicațiile $\sim \rightarrow \mathcal{B}(\sim)$ și $\mathcal{B} \rightarrow \sim(\mathcal{B})$, unde $\sim \in \mathcal{S}(M)$ iar $\mathcal{B}$ este un subgrup al lui $\mathcal{U}$, dau o corespondență Galois duală (inversă) între mulțimea parțial ordonată $\mathcal{S}(M)$ și mulțimea parțial ordonată a subgrupurilor lui $\mathcal{U}$, în așa fel încît închiderea să se realizeze în aceeași din urmă mulțime (deci prin aplicația $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}(\sim(\mathcal{B}))$, $\mathcal{B}$ subgrup al lui $\mathcal{U}$).

2°. 1. *Definiția 1.* Se numește *spațiu semi-topologic*, o mulțime S , nevidă, de elemente (*punctele spațiului*) avînd proprietatea că, pentru orice $\tau \in S$, se dă o familie nevidă de submulțimi ale lui S (familie care poartă numele de *bază de vecinătăți* a lui τ), care satisface următoarele condiții:

a) τ aparține oricăreia dintre submulțimile din baza de vecinătăți a lui τ ;

b) dacă $\tau_1, \tau_2 \in S$ și $\tau_1 \neq \tau_2$ există o submulțime din baza de vecinătăți a lui τ_1 care nu îl conține pe τ_2 .

În cazul particular în care pentru orice $\tau \in S$ și pentru orice pereche de submulțimi, U_1, U_2 , din baza de vecinătăți a lui τ există o submulțime U_3 din aceeași bază de vecinătăți, cu proprietatea $U_3 \subset U_1 \cap U_2$, S devine un spațiu topologic obișnuit (a se vedea [6], § 9, D)) cu axiomă de separație T_1 .

2. *Definiția 2.* Într-un spațiu semi-topologic S , definim:

a) *submulțime deschisă* a lui S , orice reuniune de submulțimi aparținînd diverselor baze de vecinătăți ale punctelor lui S , precum și mulțimea vidă $\emptyset$;

b) *submulțime închisă* a lui S , orice submulțime M a cărei complementară $S \setminus M$ față de S , este deschisă;

c) *vecinătate* a unui punct $\tau, \tau \in S$, orice submulțime deschisă care conține pe τ ;

d) *închidere* $\overline{M}$ a unei submulțimi $M, M \subset S$, mulțimea tuturor punctelor $\tau, \tau \in S$, care au proprietatea că pentru orice vecinătate U a lui τ , avem $U \cap M \neq \emptyset$.

¹ A se vedea și [2] precum și [1] (unde se demonstrează monotonia aplicațiilor $\mathcal{B} \rightarrow \sim(\mathcal{B})$ și $\sim \rightarrow \mathcal{B}(\sim)$).

² Această formulare presupune că același lucru se întîmplă dacă se permută τ_1 cu τ_2 .

3. Într-un spațiu semi-topologic S , avem proprietățile :

a) O reuniune oarecare de submulțimi deschise ale lui S este o submulțime deschisă.

b) O intersecție oarecare de submulțimi închise ale lui S este o submulțime închisă.

c) Pentru orice $M \subset S$, avem $M \subset \overline{M}$.

d) Pentru orice $M \subset S$, $\overline{M}$ este o submulțime închisă; căci dacă $\tau \in S \setminus \overline{M}$, există o vecinătate U a lui τ pentru care $U \cap M = \emptyset$; dacă ar exista un σ , astfel încât $\sigma \in U \cap \overline{M}$, ar trebui ca U , ca vecinătate a lui $\sigma \in \overline{M}$, să intersecțeze pe M ; rezultă $U \subset S \setminus \overline{M}$ și am găsit pentru orice $\tau \in S \setminus \overline{M}$, o vecinătate $U(\tau)$ a lui τ , pentru care $U(\tau) \subset S \setminus \overline{M}$; avem deci, $S \setminus \overline{M} = \bigcup_{\tau \in S \setminus \overline{M}} U(\tau)$ și conform a), $\overline{M}$ este o mulțime închisă.

e) O submulțime M , $M \subset S$, este închisă dacă și numai dacă $\overline{M} = M$; într-adevăr, dacă M este închisă, $S \setminus M$ este deschisă și dacă ar exista un τ , $\tau \in S$, pentru care $\tau \in \overline{M}$, $\tau \notin M$, ar urma ca $S \setminus M$, care ar fi o vecinătate a lui, să aibă intersecția nevidă cu M ; reciproca rezultă din d).

f) Pentru orice $M \subset S$, avem $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

g) Dacă $M_1 \subset M_2 \subset S$, atunci $\overline{M}_1 \subset \overline{M}_2$.

h) Pentru orice $M \subset S$, avem $M = \bigcap_{\substack{F \text{ închis} \\ S \supset F \supset M}} F$; într-adevăr conform c) și

d), $\overline{M}$ este o submulțime închisă și $\overline{M} \supset M$; deci membrul întâi al relației de demonstrat îl include pe al doilea; dacă F este una dintre mulțimile din membrul al doilea avem, conform e) și g), $F = \overline{F} \supset \overline{M}$, deci membrul al doilea îl include pe primul.

i) Dacă $M = \{\tau\}$ (adică M este o submulțime formată dintr-un singur punct), atunci M este închisă; căci pentru orice $\sigma \in S \setminus M$, avem $\sigma \neq \tau$, deci există o vecinătate U a lui σ , care nu îl conține pe τ , deci pentru care $U \subset S \setminus M$; apoi se conchide ca la punctul d).

j) Dacă $M_\lambda \subset S$, $\lambda \in \Lambda$, atunci $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{M}_\lambda \subset \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda}$.

4. Fie S, T , două spații semi-topologice; să considerăm mulțimea (S, T) a perechilor (σ, τ) , $\sigma \in S$, $\tau \in T$, ca mulțime de puncte; să luăm ca bază de vecinătăți a unui punct $(\sigma, \tau) \in (S, T)$, familia tuturor submulțimilor (U, V) , $(U, V) \subset (S, T)$, unde U respectiv V este o submulțime din baza de vecinătăți a lui σ în S , respectiv τ în T .

Pentru orice $(\sigma, \tau) \in (S, T)$ familia aceasta este nevidă și $(\sigma, \tau) \in (U, V)$ pentru orice (U, V) din familie; fie $(\sigma_i, \tau_i) \in (S, T)$, $i = 1, 2$, astfel încât $(\sigma_1, \tau_1) \neq (\sigma_2, \tau_2)$; presupunem, pentru a face o alegere, $\sigma_1 \neq \sigma_2$; dacă U este o submulțime din baza de vecinătăți a lui σ_1 în S , care nu îl conține pe σ_2 și dacă V este o submulțime din baza de veci-

nătați a lui τ_1 în T , atunci (U, V) este o submulțime din baza de vecinătăți a lui (σ_1, τ_1) în (S, T) , care nu îl conține pe (σ_2, τ_2) .

(S, T) este un spațiu semi-topologic, pe care îl notăm $S \times T$.

Definiția 3. Spațiul semi-topologic $S \times T$ se numește *produsul cartezian* al spațiilor S și T .

3°. 1. **Definiția 4.** Fie S, S' , două spații semi-topologice; o aplicație $f: S \rightarrow S'$, se numește *aplicație continuă* a lui S în S' , dacă pentru orice $\tau \in S$ și orice vecinătate U' a lui $f(\tau)$ în S' , există o vecinătate U a lui τ în S , pentru care $f(U) \subset U'$.

2. **Proprietatea 1.** Dacă S, S' sînt două spații semi-topologice iar f , o aplicație a lui S în S' , următoarele propoziții sînt echivalente două cîte două:

a) f este o aplicație continuă a lui S în S' ;

b) Pentru orice $M \subset S$, avem $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$;

c) Dacă F' este o submulțime închisă a lui S' , atunci $f^{-1}(F')$ este o submulțime închisă a lui S ;

d) Dacă U' este o submulțime deschisă a lui S' , atunci $f^{-1}(U')$ este o submulțime deschisă a lui S .

Demonstrație: a) $\Rightarrow$ b). Dacă $\tau' \in f(\overline{M})$, fie $\tau, \tau \in \overline{M}$, astfel încît $f(\tau) = \tau'$; fie U' o vecinătate oarecare a lui τ' în S' ; există, în virtutea continuității lui f , o vecinătate U a lui τ în S , pentru care $f(U) \subset U'$; există un σ , astfel încît $\sigma \in U \cap M$; avem $f(\sigma) \in U' \cap f(M)$, deci $\tau' \in \overline{f(M)}$.

b) $\Rightarrow$ c). Dacă $f^{-1}(F') = F$, avem, conform b), a faptului că $f(F) \subset F'$ și a faptului că F' este închisă, $f(F) \subset \overline{f(F)} \subset \overline{F'} = F'$; deci $\overline{F} \subset f^{-1}(F') = F$, și conform 2°, 3), e), F este închisă.

c) $\Rightarrow$ d). Fie $U = f^{-1}(U')$; să notăm $F = S \setminus U$, $F' = S' \setminus U'$; F' este o submulțime închisă a lui S' . Avem $f^{-1}(F') = F$: într-adevăr, dacă $\tau \in f^{-1}(F')$ atunci $f(\tau) \in F'$ și cum $\tau \in U$ ar implica $f(\tau) \in U'$, rezultă $\tau \in F$; reciproc, dacă $\tau \in F$, nu putem avea $f(\tau) \in U'$, deci $\tau \in f^{-1}(F')$. Deci, conform d), F este o submulțime închisă a lui S .

d) $\Rightarrow$ a). Fie $\tau \in S$ și fie U' o vecinătate arbitrară a lui $f(\tau)$ în S' . Conform d), $U = f^{-1}(U')$ este o submulțime deschisă a lui S și cum $\tau \in U$, rezultă că U este o vecinătate a lui τ în S . Dar $f(U) \subset U'$ și rezultă că aplicația f este continuă.

4°. **Definiția 5.** Se numește *grup semi-topologic*, o mulțime nevidă $\mathfrak{G}$ de elemente abstracte, care îndeplinește următoarele condiții:

1. $\mathfrak{G}$ este un grup față de o anumită lege de compoziție, notată prin $\ll \cdot \gg$ sau prin alăturare;

2. $\mathfrak{G}$ este un spațiu semi-topologic;

3. Aplicațiile p și i ,

$$p: \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}, \quad i: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G},$$

definite prin $p(\sigma, \tau) = \sigma \cdot \tau$, $i(\sigma) = \sigma^{-1}$, sînt aplicații continue.

5°. Fie M o mulțime nevidă și $\mathcal{U}$ un grup de transformări ale lui M .

1. Fie $\tau \in \mathcal{U}$; definim ca bază de vecinătăți a lui τ în $\mathcal{U}$, familia tuturor $\mathcal{U}_x^\tau$, $x \in M$, unde

$$\mathcal{U}_x^\tau = \{\sigma \in \mathcal{U}, \sigma(x) = \tau(x)\}.$$

2. *Teorema 1. Față de legea de compoziție a compunerii transformărilor și față de baza de vecinătăți a unei transformări, definită, $\mathcal{U}$ este un grup semi-topologic.*

Demonstrație. Observăm mai întâi că $\mathcal{U}$ este un grup tocmai față de compunerea transformărilor.

Trebuie să arătăm că $\mathcal{U}$ este un spațiu semi-topologic față de baza de vecinătăți a unui punct, definită: Evident, pentru orice $\tau \in \mathcal{U}$, există măcar un $\mathcal{U}_x^\tau$ și avem $\tau \in \mathcal{U}_x^\tau$, pentru orice $x \in M$. Fie $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{U}$, $\tau_1 \neq \tau_2$; există un $x, x \in M$, pentru care $\tau_1(x) \neq \tau_2(x)$, deci pentru care $\tau_2 \notin \mathcal{U}_x^{\tau_1}$.

Fie $\rho, \sigma \in \mathcal{U}$, fie $\tau = \rho\sigma = p(\rho, \sigma)$ și fie $\mathcal{U}$ o vecinătate arbitrară a lui τ în $\mathcal{U}$; conform definiției 2, a), c), există $\tau', \tau' \in \mathcal{U}$, și $x, x \in M$, astfel încât $\mathcal{U}_x^{\tau'} \subset \mathcal{U}$, $\tau \in \mathcal{U}_x^{\tau'}$; din ultima relație rezultă $\mathcal{U}_x^\tau = \mathcal{U}_x^{\tau'}$; deci există $x, x \in M$, astfel încât $\mathcal{U}_x^\tau \subset \mathcal{U}$. Să considerăm vecinătatea $(\mathcal{U}_{\sigma(x)}^\rho, \mathcal{U}_x^\sigma)$ a lui (ρ, σ) în $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$; un element oarecare din $p(\mathcal{U}_{\sigma(x)}^\rho, \mathcal{U}_x^\sigma)$ este de forma $p(\rho', \sigma') = \rho'\sigma'$ unde $\rho' \in \mathcal{U}_{\sigma(x)}^\rho$, $\sigma' \in \mathcal{U}_x^\sigma$; avem

$$\rho'\sigma'(x) = \rho'(\sigma'(x)) = \rho'(\sigma(x)) = \rho\sigma(x) = \tau(x)$$

deci $\rho'\sigma' \in \mathcal{U}_x^\tau$, deci $p(\mathcal{U}_{\sigma(x)}^\rho, \mathcal{U}_x^\sigma) \subset \mathcal{U}_x^\tau \subset \mathcal{U}$ și continuitatea aplicației p este demonstrată.

Fie $\tau \in \mathcal{U}$ și fie $\mathcal{U}$ o vecinătate arbitrară în $\mathcal{U}$ a lui $\tau^{-1} = i(\tau)$; ca și mai înainte rezultă că există $x, x \in M$, astfel încât $\mathcal{U}_x^{\tau^{-1}} \subset \mathcal{U}$.

Să considerăm vecinătatea $\mathcal{U}_{\tau^{-1}(x)}^{\tau^{-1}}$ a lui τ^{-1} în $\mathcal{U}$; un element oarecare din $i(\mathcal{U}_{\tau^{-1}(x)}^{\tau^{-1}})$ este de forma $i(\tau') = \tau'^{-1}$, $\tau' \in \mathcal{U}_{\tau^{-1}(x)}^{\tau^{-1}}$; avem

$$\tau'\tau^{-1}(x) = \tau\tau^{-1}(x) = x$$

deci $\tau'^{-1}(x) = \tau^{-1}(x)$ deci $\tau'^{-1} \in \mathcal{U}_x^{\tau^{-1}}$ deci $i(\mathcal{U}_{\tau^{-1}(x)}^{\tau^{-1}}) \subset \mathcal{U}_x^{\tau^{-1}} \subset \mathcal{U}$ și continuitatea aplicației i este demonstrată. c.c.t.d.

3. *Observația 1.* Oricare ar fi $x \in M$, $\tau \in \mathcal{U}$, avem

$$\mathcal{U}_x^\tau = \tau \cdot \mathcal{U}_x^1 \quad (1)$$

deci submulțimile din baza de vecinătăți a unei transformări oarecare τ se obțin prin translația la stînga, generată de τ , din submulțimile din baza de vecinătăți a transformării identice 1 . Pentru a demonstra relația (1), fie $\tau' \in \mathcal{U}_x^\tau$; avem $\tau^{-1}\tau'(x) = 1(x)$, deci $\tau^{-1}\tau' \in \mathcal{U}_x^1$ sau $\tau' \in \tau\mathcal{U}_x^1$; reciproc, dacă $\tau' \in \tau \cdot \mathcal{U}_x^1$, rezultă $\tau' = \tau \cdot \sigma$, unde $\sigma(x) = 1(x)$, deci $\tau'(x) = \tau\sigma(x) = \tau(x)$.

Observăm de asemenea că $\mathcal{U}_x^1$ este subgrupul $\mathcal{B}_x$, $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}$, format din transformările din $\mathcal{U}$, care invariază pe x , $x \in M$; deci mulțimile din baza de vecinătăți a unui τ , $\tau \in \mathcal{U}$, sînt clasele de resturi la stînga care îl conțin pe τ , ale lui $\mathcal{U}$ în raport cu diversele subgrupuri $\mathcal{B}_x$, $x \in M$.

Semi-topologia definită pentru grupul $\mathcal{U}$ este deci analoagă topologiei definite într-un grup de o familie de subgrupuri, care satisfac anumite condiții.

4. *Proprietatea 2. Dacă $\mathcal{U}$ este un grup regulat¹ de transformări ale lui M , semi-topologia lui $\mathcal{U}$ este discretă, adică orice $\tau \in \mathcal{U}$ are o vecinătate formată numai din τ .*

Într-adevăr, în acest caz, pentru orice $x \in M$, avem $\mathcal{U}_x^1 = \{\tau\}$.

6°. Fie M o mulțime nevidă și $\mathcal{U}$ un grup de transformări ale lui M .

1. *Teorema 2. Dacă $\mathcal{B}$ este un subgrup al lui $\mathcal{U}$, atunci*

$$\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(\sim(\mathcal{B}))$$

(unde $\overline{\mathcal{B}}$ este închiderea lui $\mathcal{B}$ în semi-topologia lui $\mathcal{U}$ (pct. 5°) iar $\mathcal{B}(\sim(\mathcal{B}))$ are semnificația de la pct. 1°); așadar, închiderea unui subgrup în semi-topologia lui $\mathcal{U}$ coincide cu închiderea aceluia subgrup în corespondența Galois duală de care a fost vorba la pct. 1°.

Demonstrație: Fie $\tau \in \mathcal{B}(\sim(\mathcal{B}))$; conform [7], teorema 2, pentru orice $x \in M$, există un τ_x , $\tau_x \in \mathcal{B}$, astfel încît $\tau_x(x) = \tau(x)$, deci pentru care avem $\tau_x \in \mathcal{U}_x^1$; în virtutea unui raționament analog celui din demonstrația teoremei 1, rezultă că orice vecinătate a lui τ include un anumit $\mathcal{U}_x^1$, $x \in M$; deci orice vecinătate a lui τ are intersecția cu $\mathcal{B}$, nevidă și $\tau \in \overline{\mathcal{B}}$.

Reciproc, fie $\tau \in \overline{\mathcal{B}}$; pentru orice $x \in M$, avem $\mathcal{U}_x^1 \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$; fie $\tau_x \in \mathcal{U}_x^1 \cap \mathcal{B}$, $x \in M$; pentru orice $x \in M$ avem $\tau_x \in \mathcal{B}$, $\tau_x(x) = \tau(x)$ și conform [7], teorema 2, avem $\tau \in \mathcal{B}(\sim(\mathcal{B}))$. c.c.t.d.

2. *Observația 2.* Am arătat la punctul 2°, 3, h) că într-un spațiu semi-topologic, închiderea unei submulțimi coincide cu intersecția submulțimilor închise, care o includ; în grupul semi-topologic $\mathcal{U}$, închiderea $\mathcal{B}$ a unui subgrup $\mathcal{B}$, coincide cu intersecția numai a subgrupurilor închise care îl includ pe $\mathcal{B}$: Într-adevăr, conform teoremei 2, $\overline{\mathcal{B}}$ este un subgrup al lui $\mathcal{U}$; de asemenea, $\overline{\mathcal{B}}$ este închis și $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}$; deci, $\overline{\mathcal{B}}$ include intersecția tuturor subgrupurilor închise ale lui $\mathcal{U}$, care îl includ pe $\mathcal{B}$; pe de altă parte, această intersecție include pe $\mathcal{B}$, care este intersecția tuturor mulțimilor închise ale lui $\mathcal{U}$, care îl includ pe $\mathcal{B}$.

3. *Proprietatea 3. În cazul particular $\mathcal{U} = \mathfrak{I}(M)$ ($\mathfrak{I}(M)$ fiind grupul tuturor transformărilor lui M) un subgrup $\mathcal{B}$ are drept închidere $\overline{\mathcal{B}}$ în $\mathfrak{I}(M)$, pe $\mathfrak{I}(M)$ (adică, cum se mai spune, este dens în $\mathfrak{I}(M)$), dacă și numai dacă $\mathcal{B}$ acționează tranzitiv pe M .*

¹ Conform cu A. G. Kuroș [4], p. 36, grupul de transformări $\mathcal{U}$ al mulțimii M , este regulat, dacă $\tau_1(x_0) = \tau_2(x_0)$ pentru măcar un x_0 , $x_0 \in M$, implică $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{U}$.

Într-adevăr, dacă $\mathfrak{B}$ este un grup tranzitiv de transformări ale lui M , fie $\tau \in \mathfrak{I}(M)$; pentru orice $x \in M$, există un τ_x , $\tau_x \in \mathfrak{B}$, astfel încît $\tau_x(x) = \tau(x)$; conform [7], teorema 2, avem $\mathfrak{B}(\sim(\mathfrak{B})) = \mathfrak{I}(M)$ (subgrupul asociat fiind luat relativ la $\mathfrak{I}(M)$); conform teoremei 2, rezultă $\mathfrak{B} = \mathfrak{I}(M)$. Reciproc, dacă $\mathfrak{B} = \mathfrak{I}(M)$, fie $a, b \in M$; fie $\tau, \tau \in \mathfrak{I}(M)$, transformarea definită prin

$$\tau(x) = \begin{cases} a, & \text{dacă } x = b \\ b, & \text{dacă } x = a \\ x, & \text{dacă } x \neq a, x \neq b. \end{cases}$$

Conform [7], teorema 2, și conform teoremei 2 de mai sus, există un τ_a , $\tau_a \in \mathfrak{B}$, astfel încît să avem $\tau_a(a) = \tau(a) = b$; deci $\mathfrak{B}$ acționează tranzitiv pe M .

4. *Observația 3.* În [5], O. Ore arată că într-o corespondență Galois între latici complete, mulțimile închise formează o latice izomorfă (izomorfism de latice!) cu laticea submulțimilor închise ale unui anumit spațiu topologic; mai mult, Everett [2], generalizînd un procedeu al lui W. Krull [3], dă condiții suficiente pentru ca într-o corespondență Galois între o latice și laticea subgrupurilor unui grup dat, să poată fi definită o topologie pe grup, astfel încît subgrupurile închise în corespondența Galois să fie închise în topologia definită. Și la noi este vorba de o corespondență Galois (duală) (a se vedea punctul 1°); însă teoria noastră este cu totul de altă natură decît teoria lui Ore, unde nu se iau în considerație decît mulțimile închise și nu este vorba decît de izomorfism de latice. În ceea ce privește teoria lui Everett, ea este mai apropiată de ceea ce facem noi; totuși, teoria noastră nu intră ca un caz particular în teoria lui Everett care, în primul rînd, folosește pentru baza de vecinătăți, elementele celeilalte latici (în cazul nostru ar trebui folosite relații de echivalență ale lui M și noi folosim chiar elemente ale lui M), în al doilea rînd, dă condiții destul de restrictive (care pentru un grup de transformări, oarecare, ar putea să nu fie îndeplinite) pentru ca cele două închideri să coincidă; deosebirea se vedește și prin aceea că, la Everett, în cazul îndeplinirii condițiilor, avem de a face cu o topologie, pe cînd la noi, în general, cu o semi-topologie. Procedul nostru are unele asemănări cu cel al lui W. Krull [3].

7°. *Teorema 3.* Fie M, M' două mulțimi nevide, fie $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$ grupuri de transformări ale lui M, M' , respectiv; fie f respectiv φ , o aplicație a lui M pe M' , respectiv $\mathfrak{U}$ pe $\mathfrak{U}'$, cu proprietatea că, pentru orice $x \in M$, $\tau \in \mathfrak{U}$, avem

$$f(\tau(x)) = (\varphi(\tau))(f(x));$$

atunci φ este o aplicație continuă a lui $\mathfrak{U}$ pe $\mathfrak{U}'$ (în semi-topologia lui $\mathfrak{U}$ și $\mathfrak{U}'$, definită).

Demonstrație. Fie $\tau \in \mathfrak{U}$ și fie $\mathfrak{U}'$ o vecinătate oarecare a lui $\varphi(\tau)$ în $\mathfrak{U}'$; conform unui raționament analog celui din demonstrația teoremei 1, există un $x', x' \in M'$, astfel încît $\mathfrak{U}_x^{(\tau)} \subset \mathfrak{U}'$; există un $x, x \in M$, astfel

încît $f(x) = x'$. Dacă $\sigma' \in \varphi(U_x^r)$, atunci σ' este de forma $\varphi(\sigma)$, $\sigma \in U_x^r$, şi deci, $\sigma(x) = \tau(x)$; avem

$$\sigma'(x') = (\varphi(\sigma))(f(x)) = f(\sigma(x)) = f(\tau(x)) = (\varphi(\tau))(f(x)) = (\varphi(\tau))(x') ;$$

$$\text{deci } \sigma' \in U_{x'}^{\varphi(r)} \text{ şi } \varphi(U_x^r) \subset U_{x'}^{\varphi(r)} \subset U'.$$

c. c. t. d.

BIBLIOGRAFIE

- [1]. P. Dubreil: *Algèbre*, II-ème édition, Gauthier-Villars, Paris, 1954.
- [2]. C. — J. Everett: *Closure operators and Galois theory in lattices*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 55, 1944, pp. 514—525.
- [3]. W. Krull: *Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen*, Math. Ann., vol. 100, 1928, pp. 687—698.
- [4]. A. Г. Курош: *Теория групп*, Издание второе, переработанное, ГИТТЛ, Москва, 1953.
- [5]. O. Ore: *Galois connexions*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 55, 1944, pp. 493—513.
- [6]. Л. С. Понтрягин: *Непрерывные группы*, ГИТТЛ, Москва, 1954.
- [7]. A. Solian: *Théorie des transi-groupes I. Relations d'équivalence et sous-groupes associés*, (sub tipar). Revue Roumaine de Math. pures et appl., vol. IX, nr. 3, 1964.

ПОЛУТОПОЛОГИЯ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В предыдущей работе [7] мы показали, что если задано множество M и группа $\mathcal{H}$ преобразований M между полуупорядоченным множеством $\mathcal{S}(M)$ отношений эквивалентности M и полуупорядоченным множеством подгрупп $\mathcal{H}$, существует дуальная связь Галуа (для определения этого понятия см. [1]).

(В частном случае, когда $\mathcal{H}$ — группа $\mathfrak{X}(M)$ всех преобразований M , теорема установлена Эвереттом [2]). Согласно О. Орэ [5] назовём операцией замыкания в полуупорядоченном множестве S отображение $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ от S в S , $\sigma, \bar{\sigma} \in S$, для которого

1. $\sigma \leq \bar{\sigma}$;
2. из $\sigma \leq \tau$ вытекает $\bar{\sigma} \leq \bar{\tau}$;
3. $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\sigma}$

Из работ Орэ [5] и Эверетта [2] вытекает, что в дуальной связи Галуа между двумя полуупорядоченными множествами двукратное итерирование отображения определяет в одном и только в одном из множеств операцию замыкания. В той связи, о которой шла речь, замыкание получается в множестве подгрупп $\mathcal{H}$.

В настоящей работе вводится в группу $\mathcal{H}$ некоторая обобщённая топология, называемая полутопологией так что:

- а) Операции умножения и взятия обратного элемента непрерывны по отношению к введенной полутопологии (Теорема 1);
- б) Замыкание подгруппы $\mathfrak{B} \subset \mathcal{H}$ в смысле рассмотренной выше связи Галуа совпадает с замыканием $\mathfrak{B}$ подгруппы $\mathfrak{B}$ в полутопологии (Теорема 2);
- в) Если φ отображение $\mathcal{H}$ на группу $\mathcal{H}^1$ преобразований множества M' и если φ удовлетворяет некоторые условия, причём естественные, то отображение φ непрерывно по отношению к полутопологиям $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^1$ (Теорема 3).

Приводятся также и другие свойства.

DEMI-TOPOLOGIE DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS

R É S U M É

Dans un travail antérieur [7], j'ai montré que, étant donné un ensemble M et un groupe $\mathcal{H}$ de transformations de M , entre l'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{S}(M)$ des relations d'équivalence dans M et l'ensemble partiellement ordonné des sous-groupes de $\mathcal{H}$, il existe une correspondance de Galois duale (inversée) (pour la définition de cette notion, voir [1]) (Dans le cas particulier où $\mathcal{H}$ est le groupe $\mathcal{T}(M)$ de toutes les transformations de M , ce théorème a été donné par Everett [2]). Selon O. Ore [5], on appelle *fermeture* dans un ensemble partiellement ordonné S , une application $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ de S en S , où $\sigma, \bar{\sigma} \in S$, telle que l'on ait :

- 1) $\sigma \leq \bar{\sigma}$;
- 2) $\sigma \leq \tau$ entraîne $\bar{\sigma} \leq \bar{\tau}$;
- 3) $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\sigma}$.

Des travaux de Ore [5] et Everett [2] on peut déduire que, dans une correspondance de Galois duale entre deux ensembles partiellement ordonnés, l'itération deux fois de l'application fournit, dans l'un et seulement un des ensembles, une fermeture. Dans la correspondance de Galois dont il a été question plus haut, c'est dans l'ensemble des sous-groupes de $\mathcal{H}$, qu'on obtient la fermeture.

Dans le travail présent on introduit dans le groupe $\mathcal{H}$ une topologie dans un sens faible, appelée *demi-topologie*, telle que :

a) Les opérations de multiplication (superposition) et inversion des transformations soient continues envers la demi-topologie introduite (théorème 1).

b) La fermeture d'un sous-groupe $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$, au sens de la correspondance de Galois ci-dessus coïncide avec la fermeture $\bar{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ dans la demi-topologie de $\mathcal{H}$ (théorème 2).

c) Si φ est une application de $\mathcal{H}$ sur un groupe $\mathcal{H}'$ de transformations d'un ensemble M' , φ étant soumis à une certaine condition, d'ailleurs très naturelle, l'application φ soit continue envers les demi-topologies de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ (théorème 3).

On donne aussi d'autres propriétés.

ORIGINAL ARTICLES

1914

The first of these is the fact that the American Medical Association has been successful in securing the passage of the Federal Food and Drug Act, which is a landmark in the history of the regulation of the food and drug industry. This act is a result of the persistent efforts of the American Medical Association and its members to secure the passage of this act, which is a landmark in the history of the regulation of the food and drug industry.

The second of these is the fact that the American Medical Association has been successful in securing the passage of the Federal Food and Drug Act, which is a landmark in the history of the regulation of the food and drug industry. This act is a result of the persistent efforts of the American Medical Association and its members to secure the passage of this act, which is a landmark in the history of the regulation of the food and drug industry.

CONDIȚII LA LIMITĂ ÎN MIȘCAREA FIRELOR EXTENSIBILE. I

N. CRISTESCU

Problemele de mișcare rapidă a firelor extensibile care au fost considerate pînă în prezent, se refereau în special la cazul firelor semiinfinite și destul de puțin la cazul firelor finite. Aproape în toate lucrările se consideră că viteza de lovire este constantă iar forma inițială a firului este rectilinie. Dacă viteza de lovire este constantă, condițiile la limită ce se pun la capătul lovit al firului sînt deosebit de simple. Aceasta deoarece în majoritatea cazurilor considerate s-au studiat numai acele materiale în care undele longitudinale se propagă mai repede decît cele transversale [1]. Dacă materialul firului satisface o lege constitutivă de forma

$$T = T(\varepsilon) \quad (1)$$

în care T este tensiunea, ε — deformația definită prin

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (2)$$

s_0 fiind coordonata Lagrangeană pe fir, iar s — coordonata curbilinie actuală, atunci viteza de propagare a undelor transversale [2] este

$$c_I = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{T}{1 + \varepsilon}} \quad (3)$$

iar cea a undelor longitudinale

$$c_{II} = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{d\varepsilon}} \quad (4)$$

ρ_0 fiind densitatea inițială.

De cele mai multe ori, pentru simplificare, s-a considerat că lovirea firului este bruscă, undele transversale reducîndu-se în acest caz la o singură undă de șoc (de discontinuitate a pantei firului). Dacă în afară de această $c_{II} > c_I$ și undele transversale se propagă într-o regiune a firului în care $\varepsilon = \varepsilon_{max} = \text{const.}$, rezultă că $c_I = \text{const.}$ Deoarece s-a presupus și viteza de lovire constantă și dacă inițial firul era rectiliniu, atunci porțiunea de fir ce are o mișcare transversală poate fi aproximată cu un seg-

ment de dreaptă. Deci întregul fir semiinfiniit poate fi aproximat cu două segmente de dreaptă, iar condițiile la limită în punctul lovit se pun ca și cum firul ar fi inextensibil.

S-a considerat de asemenea și problema lovirii unui fir cu un punct de masă finită, astfel încât firul să influențeze mișcarea acestui punct, frînându-l [3], [4]. Și în acest caz însă se presupune că undele longitudinale se propagă în fața celor transversale, uneori presupunându-se chiar că are loc și descărcarea, înainte de a se produce mișcarea transversală. În acest caz porțiunea de fir în mișcare transversală nu se mai aproximează cu un segment de dreaptă, ci cu o curbă apropiată de un segment de dreaptă. Din punctul de vedere al punerii condițiilor la limită, această porțiune de fir se comportă ca și cum ar fi o porțiune inextensibilă, în timpul mișcării transversale nemaigenerându-se noi unde longitudinale de la capătul firului.

În ceea ce privește mișcarea transversală a firelor finite, au fost considerate două tipuri de condiții la limită la capetele firului. S-a considerat problema lovirii cu o viteză constantă a unui fir rectiliniu ale cărui capete sînt frîmate în mișcarea longitudinală prin forțe proporționale cu pătratul vitezei [5]. În alte lucrări (vezi de exemplu [6]) se consideră experimental problema lovirii transversale cu viteză constantă a firelor finite, ale căror capete sînt fixate; în aceste lucrări deformația se calculează global, neținîndu-se seama de puternica neomogenitate a vitezei de deformare datorită fenomenului de propagare a undelor. În toate lucrările ce se referă la firul finit, lovirea este bruscă și deci există o singură undă de șoc, forma unei jumătăți de fir fiind totdeauna aproximată prin două segmente de dreaptă.

Ceea ce este caracteristic tuturor acestor lucrări, după cum se observă și în [1], este faptul că sînt considerate acele cazuri cînd datorită condițiilor particulare la limită sau a unor relații particulare (1), etc., undele longitudinale și cele transversale, apărute datorită lovirii nu se influențează reciproc. Condițiile la limită și cele inițiale sînt totdeauna alese astfel încît condițiile de la capătul firului să influențeze succesiv asupra mișcării longitudinale și asupra celei transversale. În legătură cu aceasta, forma și mișcarea inițială a firului au fost totdeauna luate sub o formă foarte particulară, firul fiind inițial totdeauna rectiliniu și în repaus. Bibliografia destul de complete referitoare la mecanica firelor extensibile, pot fi găsite în [1], [2], [7] și [8].

Problema propagării simultane a undelor longitudinale și transversale în fire a fost considerată în [7], unde a fost propusă o metodă de integrare aproximativă a ecuațiilor firului. Două exemple numerice, firul semiinfiniit și firul finit, au fost calculate cu ajutorul calculatorului electronic CIFA 2. Mai jos va fi expus modul de a pune condițiile la limită în aceste cazuri, atunci cînd legea constitutivă a materialului se poate scrie sub forma întregă (1). Se vor distinge două cazuri, după cum condițiile la limită se pun în timpul mișcării pe un punct fix al firului (aceeași particulă a firului) sau pe un punct mobil al firului.

În timpul lovirii transversale cu viteză variabilă a unui fir extensibil, într-un punct fix sau mobil al firului, proiecția pe tangenta la fir a vitezei

de lovire va provoca alungirea firului, iar proiecția pe normală — schimbarea formei lui. Dacă se notează cu v proiecția pe tangenta la fir a vitezei particulei firului și cu F proiecția pe aceeași tangentă a forțelor exterioare, atunci [9] pe curbele

$$\frac{ds_0}{dt} = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{d\varepsilon}} \quad (5)$$

ce reprezintă fronturi de unde longitudinale, sînt satisfăcute relațiile :

$$\pm c_{II}(\varepsilon)d\varepsilon - dv + \frac{1+\varepsilon}{\rho_0} F dt = 0 \quad (6)$$

Pe fronturile undelor transversale

$$\frac{ds_0}{dt} = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{T}{1+\varepsilon}} \quad (7)$$

sînt satisfăcute relațiile

$$dx_t = \pm c_I(\varepsilon) dx_{s_0} + \frac{1}{\rho_0} [(1+\varepsilon)X - x_{s_0}F] dt - \frac{x_{s_0}}{1+\varepsilon} (\pm c_I d\varepsilon - dv) \quad (8)$$

și alte patru ce se obțin prin permutări circulare. În aceste formule s-au utilizat notațiile $x_t = \frac{\partial x}{\partial t}$, $x_{s_0} = \frac{\partial x}{\partial s_0}$ etc.,

$$dv = \frac{1}{1+\varepsilon} (x_{s_0} dx_t + y_{s_0} dy_t + z_{s_0} dz_t), \quad F = \frac{1}{1+\varepsilon} (Xx_{s_0} + Yy_{s_0} + Zz_{s_0}),$$

X, Y, Z — fiind componentele forțelor exterioare ce acționează pe o unitate de lungime a firului și care sînt funcții presupuse cunoscute de s_0 și t .

În general vitezele (3) și (4) sînt variabile, depinzînd de ε și deci curbele (5) și (7) au în general o pantă variabilă.

Condițiile la limită la capătul firului se pun în felul următor : se cunoaște legea de mișcare a acestui punct. Trebuie date deci, numeric sau analitic, poziția și viteza acestui punct. Din calcul trebuie să rezulte apoi deformația ε , viteza longitudinală v și panta tangentei la fir în acest punct, deci x_{s_0} , y_{s_0} și z_{s_0} . Dacă prin mijloace experimentale este posibil să se cunoască în orice moment panta tangentei la fir în punctul de la capăt, atunci problema este ușurată. În general aceasta nu este totdeauna posibil și atunci este preferabil să se obțină această pantă prin calcul.

Să presupunem că de la punctul de lovire pînă la capătul opus, firul are inițial lungimea $l = n\Delta s_0$. Mărimea intervalului Δs_0 ca și a intervalului Δt corespunzător (în general variabil) cu ajutorul cărora se face un cadrilaj de linii (5), se aleg în mod convenabil. Această problemă nu va fi considerată aici. Ajungîndu-se cu integrarea la capătul firului să presupunem că cu ajutorul a două linii (5) de pantă pozitivă și negativă se construiește patrulaterul din fig. 1. Dacă în domeniul respectiv de variație a lui ε ,

relația (1) se poate aproxima cu un segment de dreaptă, patrulaterul din fig. 1 este chiar un romb. În general el este însă un patrulater neregulat. În nodurile $(m+1, n-2)$ și $(m, n-1)$ valorile tuturor funcțiilor căutate se cunosc din integrările anterioare sau din condiții le inițiale. Dacă și în nodul (m, n) valorile acestor funcții sînt cunoscute din condițiile inițiale

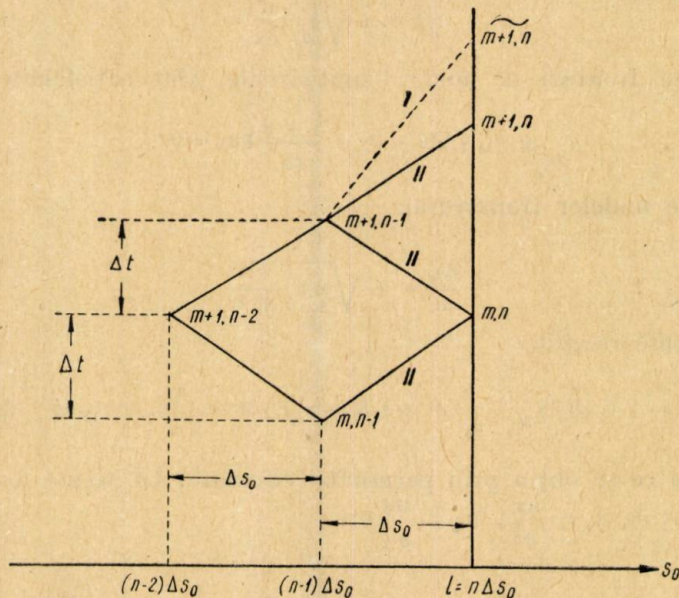


Fig. 1.

sau integrări anterioare, atunci cu ajutorul metodelor cunoscute [7], [10] se pot găsi valorile lor și în nodul $(m+1, n-1)$. Problema se pune de a găsi ε , v , x_{s_0} , y_{s_0} și z_{s_0} în nodul $(m+1, n)$, valorile corespunzătoare ale lui x_t , y_t și z_t fiind cunoscute din condițiile la limită. (Unele indicații cu privire la metoda folosită aici au fost date și în [11]). În fig. 1 liniile pline corespund curbelor (5), approximate pe porțiunile respective prin segmente de dreaptă, iar cele punctate — liniilor (7), approximate de asemenea prin segmente de dreaptă.

Valorile $v_{m+1, n}$ și $\varepsilon_{m+1, n}$ ale lui v și ε în nodul $(m+1, n)$ se obțin din

$$v_{m+1, n} = v_{m+1, n-1} + \frac{1}{1 + \varepsilon_{m+1, n-1}} \left[x_{m+1, n-1}^{s_0} (x_{m+1, n}^t - x_{m+1, n-1}^t) + \right. \\ \left. + y_{m+1, n-1}^{s_0} (y_{m+1, n}^t - y_{m+1, n-1}^t) + z_{m+1, n-1}^{s_0} (z_{m+1, n}^t - z_{m+1, n-1}^t) \right] \quad (9)$$

$$\varepsilon_{m+1, n} = \varepsilon_{m+1, n-1} + \frac{v_{m+1, n} - v_{m+1, n-1}}{C_{II}} - \frac{1 + \varepsilon_{m+1, n-1}}{\rho_0 C_{II}} F_{m+1, n-1} [t_{m+1, n} - t_{m+1, n-1}]$$

În (9), pentru ușurarea scrierii, indicii s_0 și t au fost puși superior, iar c_{II} dacă nu este constant se calculează cu ajutorul valorii lui ε în $(m+1, n-1)$.

Tot cu ajutorul lui $\varepsilon_{m+1, n-1}$, se obține din (3) c_I și apoi se trasează caracteristica (7) de pantă pozitivă ce trece prin $(m+1, n-1)$. Se calculează apoi ordonata nodului $(m+1, n)$:

$$\widetilde{t_{m+1, n}} = t_{m+1, n-1} + \frac{1 - s_{m+1, n-1}}{c_I(\varepsilon_{m+1, n-1})} \quad (10)$$

Valorile lui ε și v în nodul $(m+1, n)$ se află prin extrapolare, cu ajutorul formulei

$$\widetilde{\varepsilon_{m+1, n}} = \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \left[\widetilde{t_{m+1, n}} - (2m+n)\Delta t \right] \varepsilon_{m+1, n} - \left[\widetilde{t_{m+1, n}} - (2m+n+2)\Delta t \right] \varepsilon_{m, n} \right\} \quad (11)$$

și una similară pentru $v_{m+1, n}$. În (11) și mai jos, dacă Δt nu este constant, el se înlocuiește cu intervalul respectiv de variație a lui t . Deoarece în exemplul numeric efectiv considerat, viteza (4) este constantă și deci se poate construi un cadrilaj de linii (5) cu $\Delta t = \text{const.}$, în formulele ce urmează variația lui t de la un nod la altul va fi notată cu Δt . Prin transformarea relațiilor (8) în relații cu diferențe, considerate între nodurile $(m+1, n-1)$ și $(m+1, n)$ se pot obține apoi $\widetilde{x_{m+1, n}^{s_0}}$, $\widetilde{y_{m+1, n}^{s_0}}$ și $\widetilde{z_{m+1, n}^{s_0}}$. În sfârșit, prin

interpolare între nodurile $(m+1, n)$ și (m, n) , cu ajutorul unor formule de tipul

$$\widetilde{x_{m+1, n}^{s_0}} = \frac{2\Delta t}{\widetilde{t_{m+1, n}} - (2m+n)\Delta t} \widetilde{x_{m+1, n}^{s_0}} + \frac{\widetilde{t_{m+1, n}} - [2(m+1)+n]\Delta t}{\widetilde{t_{m+1, n}} - (2m+n)\Delta t} \widetilde{x_{m, n}^{s_0}} \quad (12)$$

și alte două similare pentru y_{s_0} și z_{s_0} , se obțin valorile lui x_{s_0} , y_{s_0} , z_{s_0} în nodul $(m+1, n)$.

În felul acesta se obțin într-o primă aproximație valorile funcțiilor ε , v , x_t , y_t , z_t , x_{s_0} , y_{s_0} , z_{s_0} în nodul $(m+1, n)$. Dacă această primă aproximație este nesatisfăcătoare, sau pentru controlul ei, se poate calcula o a doua aproximație înlocuind prima formulă (9) prin formula

$$\begin{aligned} v_{m+1, n} = & v_{m+1, n-1} + \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_{m+1, n} + \varepsilon_{m+1, n-1}}{2}} \left\{ \frac{x_{m+1, n}^{s_0} + x_{m+1, n-1}^{s_0}}{2} [x_{m+1, n}^t - x_{m+1, n-1}^t] + \right. \\ & \left. + \frac{y_{m+1, n}^{s_0} + y_{m+1, n-1}^{s_0}}{2} [y_{m+1, n}^t - y_{m+1, n-1}^t] + \frac{z_{m+1, n}^{s_0} + z_{m+1, n-1}^{s_0}}{2} [z_{m+1, n}^t - z_{m+1, n-1}^t] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Această nouă valoare a lui $v_{m+1, n}$ se introduce în a doua formulă (9) etc.

Pentru exemplificare s-au considerat două tipuri de condiții la limită: unul din capetele firului corespunzător lui $s_0 = l$ este fix, deci la acest

capăt $x_t = y_t = z_t = 0$, iar capătul opus unde $s_0 = 0$ se mișcă accelerat conform relațiilor

$$x_t = z_t = 0, y_t = -10^5 \sin(10^3 t) \quad (14)$$

Firul este inițial rectiliniu și în repaus și posedă o deformare inițială constantă în lungul firului $\varepsilon_0 = 0,04\%$. Din modul cum s-au pus condițiile inițiale și la limită rezultă că mișcarea firului este plană.

Pentru a simplifica programul de calcul dat mașinii electronice, s-a presupus că relația (1) este liniară și de forma

$$T = 70 (\varepsilon - 0,012) \quad (15)$$

unde T este dat în gr/den. iar ε în %. Cazul relațiilor (1) neliniare se consideră similar. Pentru relația constitutivă (15) se obține $c_{II} = 2,5$ km/sec. S-a ales $\Delta s_0 = 2,5$ cm. și $\Delta t = 10^{-5}$ sec. De asemenea pentru simplificare s-a presupus că influența forțelor exterioare este neglijabilă; considerarea lor nu modifică de loc schema de calcul. Lungimea inițială a firului a fost luată $l = 25$ cm.

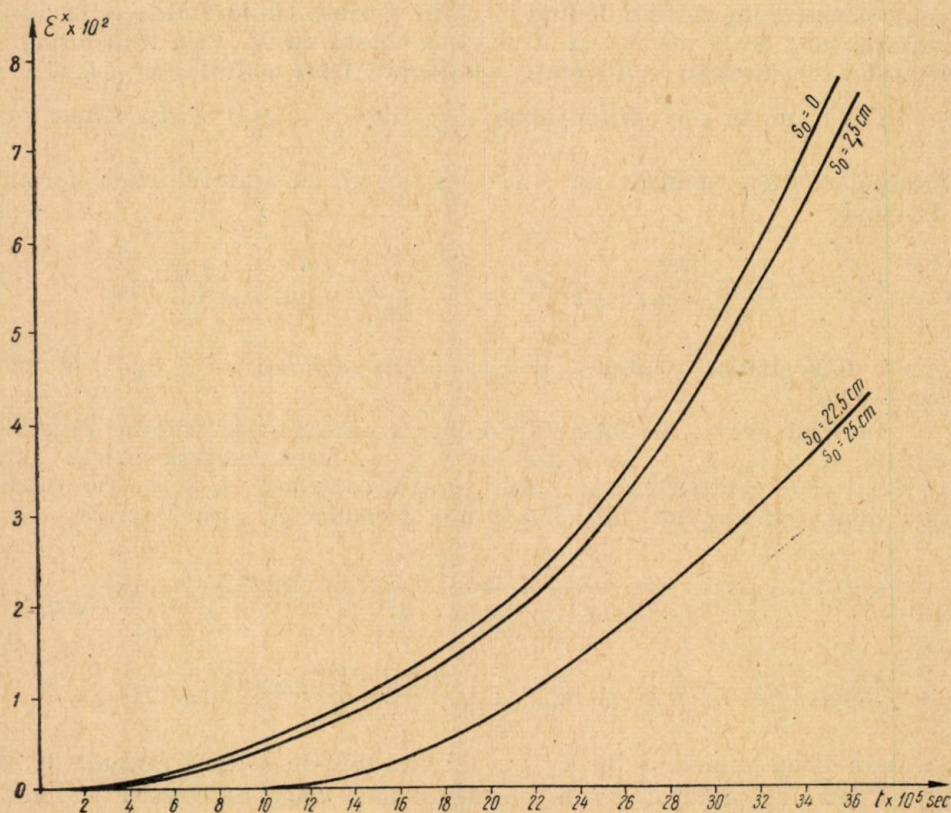


Fig. 2.

Pentru a ilustra modul cum variază diferite funcții necunoscute în apropierea capetelor firului, au fost construite graficele de mai jos. În fig. 2 sînt date graficele de variație a lui ε pentru $s_0 = 0$, $s_0 = 2,5$ cm., $s_0 = 22,5$ cm și $s_0 = 25$ cm., deci la capetele firului și în nodurile cele mai apropiate de cele două capete. Aceste curbe au fost trasate pe baza tabelii 1. Această tabelă a fost de asemenea reprodușă deoarece reflectă

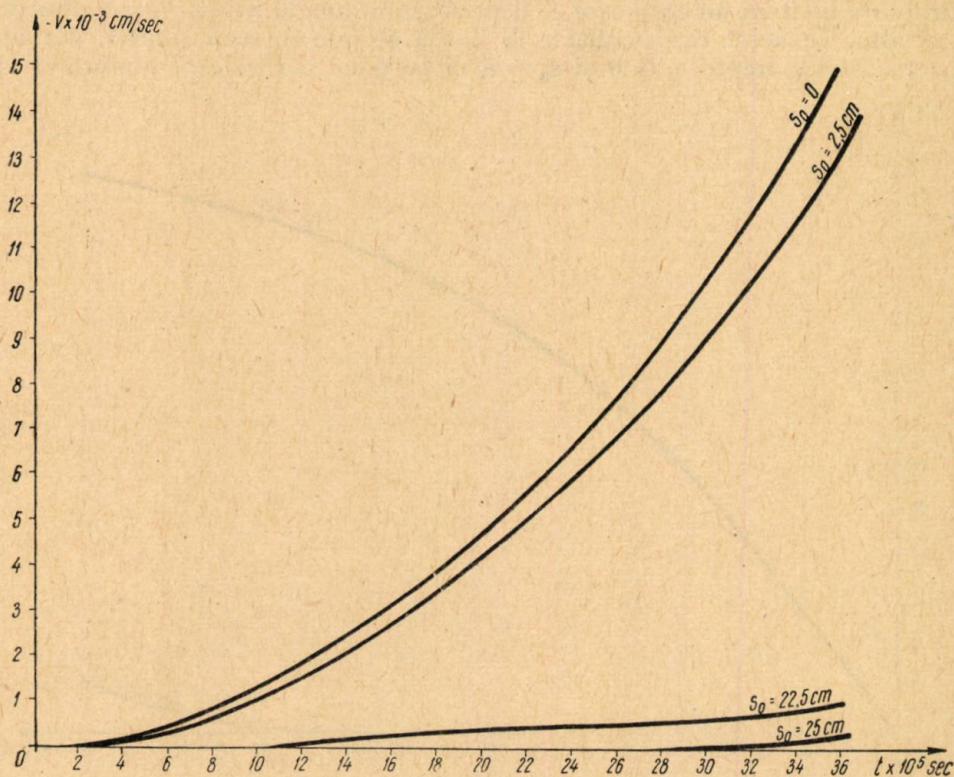


Fig. 3.

mai bine variația lui ε de-a lungul caracteristicilor (5) în vecinătatea capetelor firului. Se poate observa modul de reflectare a undelor longitudinale la capătul firului în funcție de panta corespunzătoare a firului în acel punct (pantele de la capătul firului pentru diferiți timpi t sînt date în tabelul 3). Curbele de variație a lui ε pentru $s_0 = 22,5$ cm și $s_0 = 25$ cm, practic se suprapun (fig. 2).

Apoi în fig. 3, pe baza tabelii 2 a fost reprezentată variația lui v în aceleași puncte s_0 ca și mai sus. De remarcat că din calcule rezultă că pentru $t > 30 \cdot 10^{-5}$ sec. viteza v la capătul firului $s_0 = l$ nu mai este zero. Aceasta se datorește cumularii unor erori care inițial, pentru t mai mic, erau neglijabile. În viitor, metoda aproximativă va trebui îmbunătățită pentru ca aceste erori care se cumulează să nu mai apară. Se pare că ele pot fi evitate printr-o mai judicioasă introducere a datelor în mașină.

Pentru a se putea vedea cum variază panta firului la capetele firului s-au trasat graficele din fig. 4 pe baza tabelului 3.

Mai sus s-a considerat numai cazul în care condițiile la limită sînt puse mereu în același punct al firului — capătul lui. În practică intervin deseori și probleme în care agenții exteriori, care acționează asupra firului și îl pun în mișcare, acționează asupra unui punct variabil pe fir. Deci firul este lovit cu un corp care se deplasează în lungul firului, într-o direcție sau alta. În acest caz condițiile la limită se pun în mod similar, dar nu pe cele două drepte $s_0 = 0$ și $s_0 = l$, ci pe două curbe, care reprezintă în

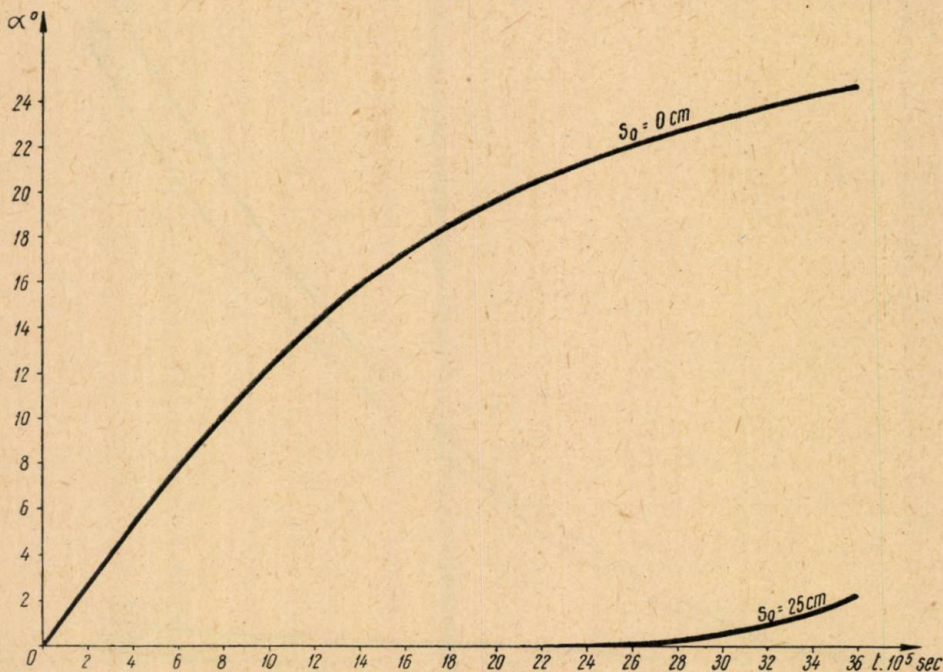


Fig. 4.

planul s_0, t mișcarea corpurilor care lovesc o anumită porțiune de fir. Un exemplu de asemenea mișcare este mișcarea unui fir ce se desfășoară de pe un mosor și se înfășoară pe al doilea mosor. Dacă viteza liniară cu care se înfășoară firul este mai mare decât cea cu care se desfășoară, există o deformare a firului ce se propagă în același timp cu mișcarea sa transversală.

Diferitele cazuri posibile ce se ivesc cînd firul este lovit în puncte variabile, nu vor fi discutate aici. Vom menționa doar că problema se poate rezolva dacă corpurile care lovesc firul se deplasează de-a lungul lui cu viteze diferite (mai mici) de vitezele de propagare a undelor. Deci panta curbelor din planul s_0, t de-a lungul cărora se dau condițiile la limită, nu trebuie să coincidă în nici unul din puncte cu panta vreunei curbe caracteristice (5) sau (7). În caz contrar există posibilitatea apariției unor discontinuități staționare care ar putea duce fie la ruperea firului, fie la „încîlcirea”, lui.

Tabelul 1

$$\varepsilon^* = \varepsilon - 0,04$$

t	$s_0 = 0 \text{ cm}$	$s_0 = 2,5 \text{ cm}$	$s_0 = 22,5 \text{ cm}$	$s_0 = 25 \text{ cm}$
$2 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0001885			
$3 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0001884		
$4 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0007815			
$5 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0007749		
$6 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0018145			
$7 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0017734		
$8 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0032415			
$9 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0031686		
$10 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0050813			
$11 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0049661	0,0001596	
$12 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0071871			0,0003191
$13 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0070709	0,0008069	
$14 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0095924			0,0012947
$15 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0094843	0,0020997	
$16 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0122924			0,0029045
$17 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0121905	0,0039576	
$18 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0152963			0,0050101
$19 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0149624	0,0063831	
$20 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0181764			0,0077544
$21 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0184057	0,0093208	
$22 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0226104			0,0108825
$23 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0228617	0,0126302	
$24 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0276409			0,0143662
$25 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0280570	0,0162561	
$26 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0336990			0,0181191
$27 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0341498	0,0201051	
$28 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0406749			0,0220346
$29 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0411784	0,0238848	
$30 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0487304			0,0256280
$31 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0491292	0,0279780	
$32 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0576526			0,0301412
$33 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0579185	0,0325747	
$34 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0673395			0,0347094
$35 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		0,0674290	0,0373917	
$36 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	0,0777440			0,0396338

Tabelul 2

$$v \text{ cm/sec.}$$

t	$s_0 = 0 \text{ cm}$	$s_0 = 2,5 \text{ cm}$	$s_0 = 22,5 \text{ cm}$	$s_0 = 25 \text{ cm}$
$2 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	— 47,12			
$3 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		— 47,11		
$4 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	— 196,87			
$5 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		— 193,72		
$6 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	— 453,63			
$7 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		— 443,36		
$8 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$	— 810,38			
$9 \cdot 10^{-5} \text{ sec.}$		— 792,14		

Tabelul 2 (continuare)

t	$s_0 = 0$ cm	$s_0 = 2,5$ cm	$s_0 = 22,5$ cm	$s_0 = 25$ cm
$10 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 1270,32			
$11 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 1241,51	- 39,89	
$12 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 1796,78			0
$13 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 1767,73	- 121,94	
$14 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 2398,09			0
$15 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 2371,09	- 201,26	
$16 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 3073,11			- 0,04
$17 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 3047,63	- 263,29	
$18 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 3824,08			- 0,16
$19 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 3855,47	- 343,42	
$20 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 4658,98			- 0,60
$21 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 4521,65	- 392,20	
$22 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 5572,82			- 1,77
$23 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 5391,77	- 438,70	
$24 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 6586,56			- 4,71
$25 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 6288,14	- 477,20	
$26 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 7698,65			- 11,46
$27 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 7285,09	- 507,97	
$28 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 8916,38			- 25,60
$29 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 8356,61	- 588,14	
$30 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 10244,61			- 52,33
$31 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 9563,46	- 639,82	
$32 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 11694,30			- 99,03
$33 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 10892,79	- 707,40	
$34 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 13248,05			- 173,71
$35 \cdot 10^{-5}$ sec.		- 12338,94	- 844,28	
$36 \cdot 10^{-5}$ sec.	- 14917,70			- 283,76

$$\alpha^\circ = \arctg \frac{y_{s_0}}{x_{s_0}}$$

Tabelul 3

t	$s_0 = 0$ cm	$s_0 = 25$ cm
$0 \cdot 10^{-5}$ sec.	0	0
$2 \cdot 10^{-5}$ sec.	2° 42' 3''	0
$4 \cdot 10^{-5}$ sec.	5 22 12	0
$6 \cdot 10^{-5}$ sec.	7 55 54	0
$8 \cdot 10^{-5}$ sec.	10 18 33	0
$10 \cdot 10^{-5}$ sec.	12 26 24	0
$12 \cdot 10^{-5}$ sec.	14 19 56	0
$14 \cdot 10^{-5}$ sec.	15 59 04	0
$16 \cdot 10^{-5}$ sec.	17 25 23	0° 0' 03''
$18 \cdot 10^{-5}$ sec.	18 40 36	0 0 12
$20 \cdot 10^{-5}$ sec.	19 46 35	0 0 37
$22 \cdot 10^{-5}$ sec.	20 44 31	0 1 38
$24 \cdot 10^{-5}$ sec.	21 33 40	0 3 54
$26 \cdot 10^{-5}$ sec.	22 16 06	0 8 28
$28 \cdot 10^{-5}$ sec.	22 52 02	0 16 55
$30 \cdot 10^{-5}$ sec.	23 24 15	0 31 25
$32 \cdot 10^{-5}$ sec.	23 52 30	0 55 05
$34 \cdot 10^{-5}$ sec.	24 20 53	1 31 15
$36 \cdot 10^{-5}$ sec.	24 48 12	2 22 34

În încheiere vreau să mulțumesc lui N. Moldovan care a făcut programul pentru mașina de calcul și a supravegheat calculele și Corneliei Cristescu care a efectuat manual o serie de calcule necesare și unele verificări numerice.

BIBLIOGRAFIE

1. X. A. Рахматулин и Ю. А. Демянов: *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках* — Москва 1961.
2. N. Cristescu: *Probleme dinamice în Teoria plasticității*, Ed. Tehnică, București, 1958.
3. X. A. Рахматулин: *Поперечный удар по гибкой нити с переменной скоростью*. Уч. зап. М. Г. У., т. IV, 1951.
4. Е. В. Рябова: *Поперечный удар с переменной скоростью по гибкой нити* Вестник М. Г. У., № 10, 1953.
5. Т. С. Мороз: *Переходные этапы движения гибкой нити конечной длины при поперечном ударе*, П. М. М., т. XX в 6, 1956.
6. J. C. Smith, F. L. Mc Crackin, H. F. Schiefer, W. K. Stone and K. M. Towne: *Stress-Strain Relationships in Yarns Subjected to Rapid Impact Loading*. Part IV. Text. Research Journal vol. XXVI, 11, (1956), pp. 821—828.
7. N. Cristescu: *Spatial motion of elastic-plastic strings*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 9 (1961), pp. 165—178.
8. Idem: *European contributions to dynamic loading and plastic waves*, vol. Plasticity, pp. 385—442, Pergamon Press 1960.
9. Idem: *Elastic-plastic waves in strings*. Arch. Mech. Stos. 12, 5/6, (1960), pp. 597—615.
10. Idem: *Loading Waves in Transverse Motion of Extensible Strings*, Arch. Mech. Stos. 15, 1, (1963) pp. 47—61.
11. Idem: *Rapid motions of elastic-plastic cables*, in volumul „La propagation des ébranlements dans les milieux hétérogènes“. Colloques CNRS no. 111, 1962.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ДВИЖЕНИИ УДЛИНЯЮЩИХСЯ НИТЕЙ. I

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается задача граничных условий для уравнений движения удлиняющихся нитей. В этих случаях необходимо привести последовательные положения концов нитей, и потом вычислением надо получить деформацию и наклон нити в этих точках (концах). Излагается приблизительный метод для вычислительной электронной машины. В численном примере принимается во внимание что один из концов нити неподвижен, а другой движется ускоренно.

BOUNDARY CONDITIONS IN THE MOVEMENT OF EXTENSIBLE STRINGS. I

SUMMARY

The problem of boundary conditions for the equations of extensible strings is considered. In these cases the successive positions of the end-points of the finite string must be given, and the deformation and slope of the string in these points must be obtained by calcul. An approximate method, adopted for an electronic computer, is given. The numerical example applies to a string with a fix end, the other end having an accelerated movement.

ASUPRA UTILIZĂRII FUNCȚILOR DE TENSIUNE ÎN PROBLEMA PLANĂ A TEORIEI ELASTICITĂȚII ÎN COORDONATE OBLICE

P. P. TEODORESCU

1. În cazul problemei plane a teoriei elasticității este adesea util să se folosească alte sisteme de coordonate decît cele carteziane rectangulare, sisteme de coordonate alese în mod convenabil, funcție de conturul domeniului plan considerat.

Astfel, pentru grinzile pereți oblice (contur paralelogram, avînd eventual una sau mai multe laturi aruncate la infinit), grinzile pereți triunghiulare etc. este util să se folosească coordonate carteziane oblice. Grinzi pereți de acest fel se întîlnesc de multe ori în practica inginerescă; de exemplu, pîlnia unui buncăr este mărginită de plăci plane cu contur triunghiular sau (mai adesea) trapezoidal care, pe lîngă acțiunea de placă supusă la încovoiere, lucrează și ca grinzi pereți supuse la o stare de tensiune plană.

Pentru rezolvarea acestor probleme s-au dat diferite reprezentări ale tensorului tensiune și ale vectorului deplasare cu ajutorul unor funcția de tensiune sau de deplasare, reprezentări care sînt mai convenabile uneie sau alteia dintre problemele fundamentale ale teoriei elasticității.¹ În celi ce urmează ne vom referi la prima problemă fundamentală (condiții pe contur în tensiuni) și vom folosi reprezentări cu ajutorul funcțiilor de tensiune.

2. În cazul unui sistem de coordonate carteziane oblice $0\xi, 0\eta$, care formează unghiul ω , am arătat [2] că putem exprima tensiunile normale (normale la liniile de coordonate $\xi = \text{const}$, respectiv $\eta = \text{const}$) sub forma

$$\sigma_{\xi} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}, \quad \sigma_{\eta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}, \quad (1)$$

¹ Pentru amănunte bibliografice vezi lucrarea [2].

tensiunile tangențiale (paralele cu liniile de coordonate $\eta = \text{const}$, respectiv $\xi = \text{const}$) fiind date de

$$\begin{aligned}\tau_{\xi\eta} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \operatorname{cosec} \omega + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \operatorname{ctg} \omega, \\ \tau_{\eta\xi} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \operatorname{cosec} \omega + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \operatorname{ctg} \omega.\end{aligned}\quad (2)$$

Componentele u_ξ , u_η ale vectorului deplasare vor fi date de

$$\begin{aligned}E \sin^4 \omega [u_\xi - (-\omega_0 \eta + u_\xi^0)] &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} d\xi - \cos \omega \int \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} d\eta + \\ &+ (3 \cos^2 \omega - \mu \sin^2 \omega) \frac{\partial F}{\partial \xi} - \cos \omega (2 + \cos^2 \omega - \mu \sin^2 \omega) \frac{\partial F}{\partial \eta} - \\ &- f_1(\eta) + f_2(\xi) \cos \omega,\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}E \sin^4 \omega [u_\eta - (\omega_0 \xi + u_\eta^0)] &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} d\eta - \cos \omega \int \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} d\xi + \\ &+ (3 \cos^2 \omega - \mu \sin^2 \omega) \frac{\partial F}{\partial \eta} - \cos \omega (2 + \cos^2 \omega - \mu \sin^2 \omega) \frac{\partial F}{\partial \xi} - \\ &- f_2(\xi) + f_1(\eta) \cos \omega,\end{aligned}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală, μ este coeficientul de contracție transversală al lui Poisson iar u_ξ^0 , u_η^0 , ω_0 sînt deplasările, respectiv rotirea corpului considerat ca un rigid; funcțiile de o singură variabilă $f_1(\eta)$ și $f_2(\xi)$ sînt integrale particulare ale ecuației diferențiale cu variabile separate

$$\begin{aligned}\frac{df_1(\eta)}{d\eta} + \frac{df_2(\xi)}{d\xi} &= \\ &= \int \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} d\xi + \int \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} d\eta - 4 \cos \omega \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) + 2(2 + \cos 2\omega) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}.\end{aligned}\quad (4)$$

Funcția de tensiune F , în lipsa forțelor masice, va trebui să verifice ecuația biarmonică

$$\Delta \Delta F(\xi, \eta) = 0, \quad (5)$$

unde operatorul lui Laplace este dat de

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \cos \omega \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \operatorname{cosec}^2 \omega. \quad (6)$$

Dacă $(p_{n\xi}, p_{n\eta})$ sînt componentele sarcinii exterioare, după direcțiile 0η , respectiv 0ξ , pe elementul de linie de normală exterioară $\bar{n}$, putem scrie condițiile pe contur sub forma

$$\begin{aligned} p_{n\xi} \sin \omega &= \sigma_{\xi} \cos (\eta, \xi) + (\tau_{\eta\xi} \sin \omega - \sigma_{\eta} \cos \omega) \cos [(\eta, \xi) - \omega], \\ p_{n\eta} \sin \omega &= \sigma_{\eta} \cos [(\eta, \xi) - \omega] + (\tau_{\xi\eta} \sin \omega - \sigma_{\xi} \cos \omega) \cos (\eta, \xi), \end{aligned} \quad (7)$$

problema fiind astfel în întregime formulată, din punct de vedere matematic.

3. Modul de a alege funcția de tensiune, depinzînd de anumiți parametri arbitrari ce se determină prin condițiile la limită, prezintă o importanță deosebită. În cele ce urmează vom face cîteva considerații în legătură cu modul de a construi funcția potențial pentru cazul unui domeniu paralelogram cu toate laturile la distanță finită sau pentru care una sau mai multe laturi sînt aruncate la infinit, ca și pentru cazul unui domeniu triunghiular, extinzînd astfel metodele de calcul folosite de noi [4], [8] în cazul dreptunghiului elastic.

Folosim funcții de tensiune construite cu ajutorul reprezentării lui E. Almansi [1] a unei funcții biarmonice

$$F = \Phi + (a + b\xi + c\eta)\Psi \quad (a, b, c = \text{const}), \quad (8)$$

funcțiile armonice $\Phi = \Phi(\xi, \eta)$ și $\Psi = \Psi(\xi, \eta)$ fiind de forma

$$e^{\lambda\xi + \nu\eta}, \quad (9)$$

cu

$$\lambda^2 - 2 \cos \omega \lambda \nu + \nu^2 = 0. \quad (10)$$

Aceasta ne conduce la funcții armonice de forma

$$e^{\lambda[\xi + (\cos \omega \pm i \sin \omega)\eta]} \quad (11)$$

sau de forma

$$e^{\pm i\lambda(\xi + \eta \cos \omega)} e^{\pm \lambda\eta \sin \omega}. \quad (11')$$

Vom utiliza următoarele integrale ale ecuației armonice

$$\begin{aligned} \cos [\lambda(\xi + \eta \cos \omega)] \operatorname{ch} (\lambda\eta \sin \omega), \quad \cos [\lambda(\xi + \eta \cos \omega)] \operatorname{sh} (\lambda\eta \sin \omega), \\ \sin [\lambda(\xi + \eta \cos \omega)] \operatorname{ch} (\lambda\eta \sin \omega), \quad \sin [\lambda(\xi + \eta \cos \omega)] \operatorname{sh} (\lambda\eta \sin \omega), \end{aligned} \quad (12)$$

precum și pe cele obținute schimbînd între ele rolul variabilelor ξ și η ; cu ajutorul acestor funcții armonice, se pot construi funcții biarmonice de forma (8). În cazul în care domeniul paralelogram are una din laturi aruncată la infinit pe o anumită direcție, se folosesc componente armonice care cuprind exponențiale, cu exponentul corespunzător direcției respective; în caz contrar se folosesc componente armonice care cuprind linii iperbolice. Cu ajutorul acestor funcții biarmonice se pot construi dezvoltări în serie Fourier sau integrale Fourier, utile în cazul unei încărcări periodice, respectiv locale.

4. Dacă numai o latură ($\eta = 0$) a paralelogramului elastic este la distanță finită, obținem semiplanul elastic $\eta \geq 0$ (fig. 1). Se poate studia astfel cazul unei sarcini periodice

$$p(\xi) = \sum_n a_n \sin \gamma_n \xi, \quad (13)$$

unde

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (14)$$

cu lungimea perioadei $L_\xi = 2a$, pe linia de separație; se folosește o funcție de tensiune de forma [3]

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) = & \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2} (A_n + \gamma_n \eta \sin \omega B_n) e^{-\gamma_n \eta \sin \omega} \cos [\gamma_n (\xi + \eta \cos \omega)] + \\ & + \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2} (A'_n + \gamma_n \eta \sin \omega B'_n) e^{-\gamma_n \eta \sin \omega} \sin [\gamma_n (\xi + \eta \cos \omega)]. \end{aligned} \quad (15)$$

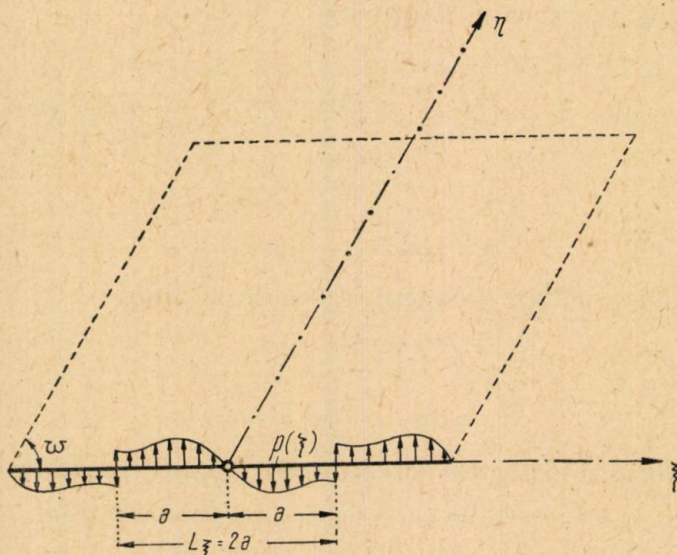


Fig. 1.

Șirurile de coeficienți A_n , A'_n , B_n , B'_n se determină prin condițiile la limită

$$\eta = 0: \sigma_\eta = p(\xi), \quad \tau_{\eta\xi} = 0, \quad (16)$$

avînd grijă ca tensiunile să se anuleze pentru $\eta \rightarrow \infty$.

5. Fie cazul paralelogramului elastic pentru care numai două laturi sînt la distanță finită. În cazul a două laturi paralele se obține banda

unde

$$a(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p(\vartheta) \sin \alpha \vartheta d\vartheta, \quad (20)$$

se alege funcția de tensiune

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) = & \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} \{ A \operatorname{ch}(\alpha \eta \sin \omega) + B \operatorname{sh}(\alpha \eta \sin \omega) + \\ & + \alpha \eta \sin \omega [C \operatorname{sh}(\alpha \eta \sin \omega) + D \operatorname{ch}(\alpha \eta \sin \omega)] \} \cos[\alpha(\xi + \eta \cos \omega)] d\alpha + \\ & + \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} \{ A' \operatorname{ch}(\alpha \eta \sin \omega) + B' \operatorname{sh}(\alpha \eta \sin \omega) + \\ & + \alpha \eta \sin \omega [C' \operatorname{sh}(\alpha \eta \sin \omega) + D' \operatorname{ch}(\alpha \eta \sin \omega)] \} \sin[\alpha(\xi + \eta \cos \omega)] d\alpha, \end{aligned} \quad (21)$$

cele 8 funcții $A = A(\alpha)$, $B(\alpha)$, ..., $C'(\alpha)$, $D'(\alpha)$ fiind determinate tot prin condițiile la limită (18).

6. Dacă laturile la distanță finită ($\xi = 0$ și $\eta = 0$) fac între ele unghiul ω , se obține pana elastică $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$. Vom presupune că numai linia de separație $\eta = 0$ este acționată de o sarcină exterioară normală (fig. 3).

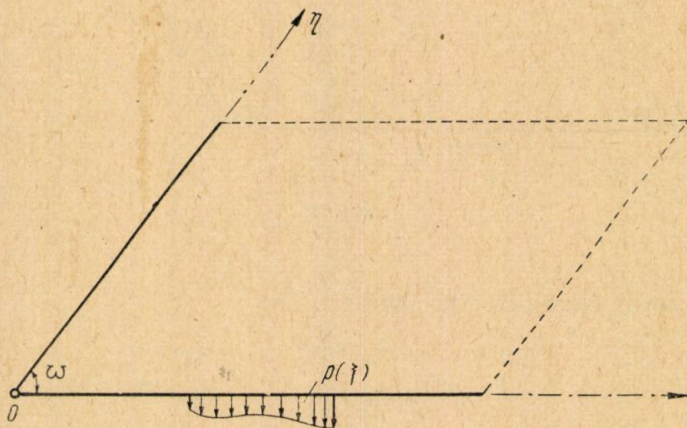


Fig. 3.

Se poate arăta, ca și în cazul sfertului de plan elastic, considerat de noi în [5] și [7], că un caz de încărcare cu o sarcină periodică pe $\eta = 0$ este echivalent cu un caz de încărcare cu o sarcină locală pe cealaltă linie de separație, peste care se suprapune un caz de încărcare periodică a semiplanului elastic $\eta \geq 0$, obținut prin periodicizare și pentru $\xi < 0$.

În cazul unei încărcări normale locale de forma (19), (20) pe latura $\eta = 0$, considerată dispusă antisimetric față de origina 0, pe axa $O\xi$ prelungită la stînga, se introduce funcția de tensiune

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) = & \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} [A(\alpha) + \alpha\eta \sin \omega B(\alpha)] e^{-\alpha\eta \sin \omega} \cos [\alpha(\xi + \eta \cos \omega)] d\alpha + \\ & + \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} [A'(\alpha) + \alpha\eta \sin \omega B'(\alpha)] e^{-\alpha\eta \sin \omega} \sin [\alpha(\xi + \eta \cos \omega)] d\alpha + \\ & + \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^2} [C(\beta) + \beta\xi \sin \omega D(\beta)] e^{-\beta\xi \sin \omega} \cos [\beta(\eta + \xi \cos \omega)] d\beta + \\ & + \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^2} [C'(\beta) + \beta\xi \sin \omega D'(\beta)] e^{-\beta\xi \sin \omega} \sin [\beta(\eta + \xi \cos \omega)] d\beta, \end{aligned} \quad (22)$$

astfel încît condițiile la infinit să fie verificate. Funcțiile $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, ..., $C'(\beta)$, $D'(\beta)$ sînt determinate de condițiile la limită

$$\begin{aligned} \xi = 0: & \quad \sigma_{\xi} = 0, & \tau_{\xi\eta} = 0, \\ \eta = 0: & \quad \sigma_{\eta} = p(\xi), & \tau_{\eta\xi} = 0; \end{aligned} \quad (23)$$

în felul acesta rezolvarea problemei se reduce la integrarea unui sistem de ecuații integrale. Existența și unicitatea soluției se pot demonstra în cadrul funcțiilor generalizate, soluția obținută fiind astfel valabilă și pentru încărcări cu sarcini concentrate.

7. Dacă se aruncă la infinit numai una din laturile paralelogramului elastic, se obține semibanda elastică oblică. Pentru acest domeniu se poate face un studiu analog cu cel întreprins de noi [6] pentru semibanda elastică dreaptă.

Alegem ca axă $O\xi$ axa de simetrie oblică (după direcția axei $O\eta$) și ca axă $O\eta$ secțiunea de capăt (fig. 4).

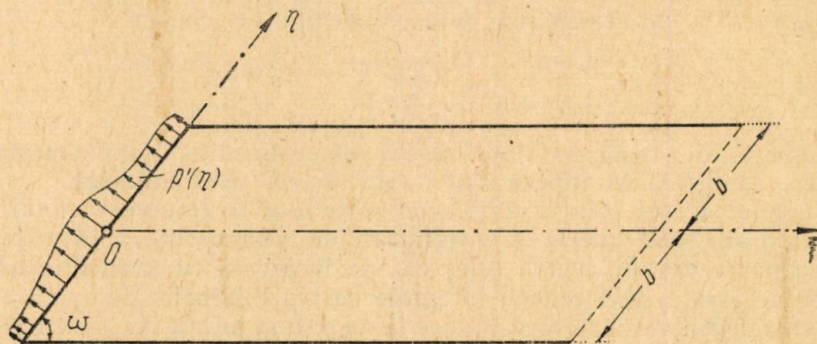


Fig. 4.

Ca și în cazul semibenzii elastice drepte, se poate arăta că studiul semibenzii elastice oblice $\xi \geq 0$, $|\eta| \leq b$, încărcată cu o sarcină oarecare se poate reduce la studiul benzii elastice $|\eta| \leq b$ în care este cuprinsă semibanda, acționată de aceeași încărcare, prelungită — prin simetrie sau antisimetrie oblică — pentru $\xi < 0$, și la studiul semibenzii $\xi \geq 0$, $|\eta| \leq b$, acționată numai pe fața $\xi = 0$. Primul caz de încărcare fiind deja considerat, rămâne de studiat numai cel de-al doilea caz.

Fie astfel cazul semibenzii elastice acționată pe fața $\xi = 0$ de o sarcină normală, simetrică în raport cu origina 0,

$$p'(\eta) = b_0 + \sum_m b_m \cos \delta_m \eta, \quad (24)$$

unde

$$\delta_m = \frac{m\pi}{b} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (25)$$

cu perioada $L_\eta = 2b$. Forma generală a funcției de tensiune pe care o folosim se scrie

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) = & \frac{1}{2}(K_1 \xi^2 + K_2 \eta^2) + \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} \{ A(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha \eta \sin \omega) + B(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha \eta \sin \omega) + \\ & + \alpha \eta \sin \omega [A'(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha \eta \sin \omega) + B'(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha \eta \sin \omega)] \} \cos [\alpha(\xi + \eta \cos \omega)] d\alpha + \\ & + \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} \{ A''(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha \eta \sin \omega) + B''(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha \eta \sin \omega) + \\ & + \alpha \eta \sin \omega [A'''(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha \eta \sin \omega) + B'''(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha \eta \sin \omega)] \} \sin [\alpha(\xi + \eta \cos \omega)] d\alpha + \\ & + \sum_m \frac{1}{\delta_m^2} (C_m + \delta_m \xi \sin \omega D_m) e^{-\delta_m \xi \sin \omega} \cos [\delta_m(\eta + \xi \cos \omega)] + \\ & + \sum_m \frac{1}{\delta_m^2} (C'_m + \delta_m \xi \sin \omega D'_m) e^{-\delta_m \xi \sin \omega} \sin [\delta_m(\eta + \xi \cos \omega)], \end{aligned} \quad (26)$$

unde funcții $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, ..., $A'''(\alpha)$, $B'''(\alpha)$ și coeficienții K_1 , K_2 , C_m , D_m , C'_m , D'_m se determină prin condițiile pe contur

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad & \sigma_\xi = p'(\eta), \quad \tau_{\xi\eta} = 0, \\ \eta = \pm b: \quad & \sigma_\eta = 0, \quad \tau_{\eta\xi} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Funcția de tensiune fiind aleasă corespunzător unor transformate Fourier, condițiile la infinit sînt verificate în mod automat.

În felul acesta soluția problemei se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare cu o infinitate de necunoscute, a cărui regularitate se poate dovedi pentru orice caz de încărcare cu sarcini repartizate, sau la integrarea unei ecuații integrale de tip Fredholm de speța a doua, cu nucleu degenerat, care ne conduce la un sistem infinit de ecuații algebrice liniare, echivalent cu primul.

8. În cazul în care toate laturile paralelogramului sînt la distanță finită, se poate face un studiu analog cu cel întreprins de noi [8] pentru grinzile pereți cu contur dreptunghiular.

Pentru ușurința calculului, se poate descompune cazul general de încărcare în mai multe cazuri particulare de încărcare normală sau tangen-

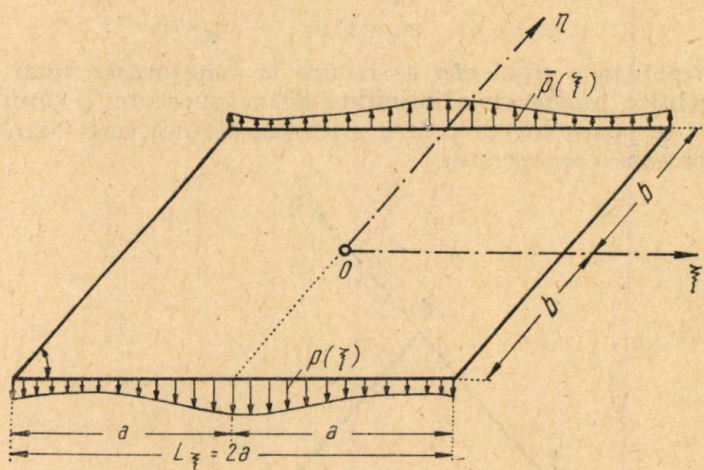


Fig. 5.

țială, după proprietăți de simetrie sau antisimetrie oblică (de exemplu, simetrie față de axa 0ξ , după direcția axei 0η). În figura 5 am considerat o încărcare normală

$$\bar{p}(\xi) = p(\xi) = b_0 + \sum_n b_n \cos \gamma_n \xi, \quad (28)$$

cu notația (14). Forma generală a funcției de tensiune pe care o folosim este

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} (K_1 \xi^2 + K_2 \eta^2) + \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2} \{ A_n \operatorname{ch} (\gamma_n \eta \sin \omega) + B_n \operatorname{sh} (\gamma_n \eta \sin \omega) + \\ & + \gamma_n \eta \sin \omega [A'_n \operatorname{sh} (\gamma_n \eta \sin \omega) + B'_n \operatorname{ch} (\gamma_n \eta \sin \omega)] \} \cos [\gamma_n (\xi + \eta \cos \omega)] + \\ & + \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2} \{ A''_n \operatorname{ch} (\gamma_n \eta \sin \omega) + B''_n \operatorname{sh} (\gamma_n \eta \sin \omega) + \\ & + \gamma_n \eta \sin \omega [A'''_n \operatorname{sh} (\gamma_n \eta \sin \omega) + B'''_n \operatorname{ch} (\gamma_n \eta \sin \omega)] \} \sin [\gamma_n (\xi + \eta \cos \omega)] + \\ & + \sum_m \frac{1}{\delta_m^2} \{ C_m \operatorname{ch} (\delta_m \xi \sin \omega) + D_m \operatorname{sh} (\delta_m \xi \sin \omega) + \\ & + \delta_m \xi \sin \omega [C'_m \operatorname{sh} (\delta_m \xi \sin \omega) + D'_m \operatorname{ch} (\delta_m \xi \sin \omega)] \} \cos [\delta_m (\eta + \xi \cos \omega)] + \\ & + \sum_m \frac{1}{\delta_m^2} \{ C''_m \operatorname{ch} (\delta_m \xi \sin \omega) + D''_m \operatorname{sh} (\delta_m \xi \sin \omega) + \\ & + \delta_m \xi \sin \omega [C'''_m \operatorname{sh} (\delta_m \xi \sin \omega) + D'''_m \operatorname{ch} (\delta_m \xi \sin \omega)] \} \sin [\delta_m (\eta + \xi \cos \omega)], \end{aligned} \quad (29)$$

șirurile de coeficienți $A_n, B_n, \dots, C_m, D_m$, precum și coeficienții K_1, K_2 rămânând de determinat. Am folosit de asemenea notația (25).

Punînd condițiile la limită

$$\begin{aligned} \xi = \pm a: \quad \sigma_\xi &= 0, & \tau_{\xi\eta} &= 0, \\ \eta = \pm b: \quad \sigma_\eta &= p(\xi), & \tau_{\eta\xi} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

găsim că rezolvarea problemei se reduce la soluționarea unui sistem de ecuații algebrice liniare cu o infinitate de necunoscute, a cărui completă regularitate se poate dovedi pentru orice caz de încărcare (afară de încărcări cu momente concentrate).

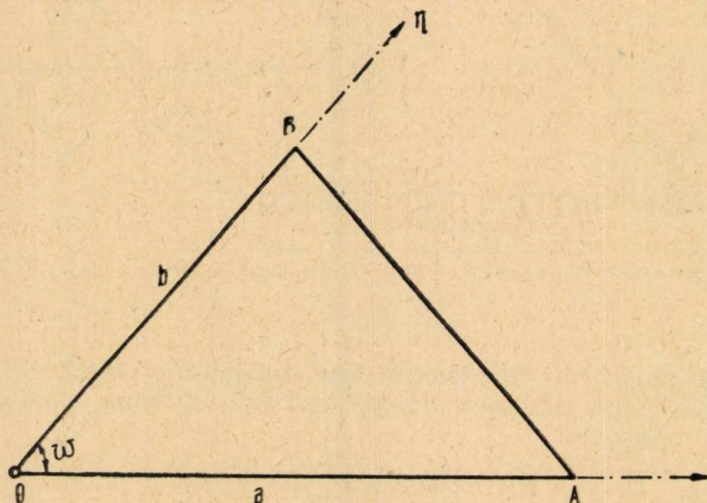


Fig. 6.

9. În cazul unei grinzi perete cu contur triunghiular, este convenabil să alegem două din laturi (OA și OB, de lungime a , respectiv b) ca axe de coordonate 0ξ și 0η (fig. 6). Latura AB va fi, în acest caz, precizată de ecuația

$$\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} = 1. \quad (31)$$

Alegem o funcție de tensiune de forma (29), constantele arbitrare fiind precizate de condiții la limită pe laturile $\xi = 0$, $\eta = 0$ și dreapta de ecuație (31). Soluția acestei probleme se reduce tot la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare cu o infinitate de necunoscute.

În cazul triunghiului isoscel, ecuația dreptei AB devine

$$\xi + \eta = a, \quad (31')$$

ceea ce ne conduce la simplificări de calcul, dacă se consideră proprietăți de simetrie sau de antisimetrie ale încărcării.

10. Considerațiile făcute mai sus se pot aplica, în mod adecuat, și pentru alte cazuri de încărcare, cu alte proprietăți de simetrie sau antisimetrie, sau pentru încărcări cu sarcini tangențiale. De asemenea, considerațiile făcute pot fi extinse pentru încărcări cu forțe masice oarecare, încărcări cu sarcini concentrate interioare etc., precum și pentru grinzi pereți încastrate.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Almansi: *Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^2 u = 0$* , Ann. di Matem., serie III, vol. II, 1898, p. 1.
2. P. P. Teodorescu: *Asupra problemei plane a elasticității în coordonate oblice*, Șt. și cerc. de mec. apl., t. IX, nr. 2, 1958, p. 391.
3. Idem: *Asupra calculului grinzilor pereți cu contur paralelogram*, An. Univ. „C. I. Parhon“, seria șt. nat., an VII, nr. 20, 1958, p. 9.
4. Idem: *Funcții de tensiune în problema plană a teoriei elasticității*, Acad. R.P.R., Filiala Iași, Șt. și cerc. științ., Matematică, an XI, fasc. 2, 1960, p. 363.
5. Idem: *Sur le problème du coin plan élastique*, C. Rend. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., t. 250, nr. 21, 1960, p. 3446.
6. Idem: *Sur le problème de la demibande plane élastique*, Archiwum Mechaniki stosowanej, vol. XII, nr. 3, 1960, p. 313.
7. Idem: *Sur le problème du quart de plan élastique*, Aplikace matematiky, t. VI, nr. 5, 1961, p. 359.
8. Idem: *Probleme plane în teoria elasticității*, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., București, 1961.

ОБ УПОТРЕБЛЕНИИ ФУНКЦИЙ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В КОСОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Дается метод построения функций напряжения для плоской задачи теории упругости в косоугольных координатах, направляя особое внимание к области параллелограмма. Рассматриваются также случаи, в которых одна или несколько сторон упругого параллелограмма уходят в бесконечность: упругие полуплоскость, полоса, клин, полуполоса. Решение первой основной задачи теории упругости (граничные условия — в напряжениях) может быть получено в единой форме для всех этих областей. Рассматриваются случаи периодической и местной нагрузки.

SUR L'UTILISATION DES FONCTIONS DE TENSION DANS LE PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES OBLIQUES

R É S U M É

On présente une méthode pour construire des fonctions de tension dans le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées obliques, en insistant sur le domaine parallélogramme. On considère aussi les cas dans lesquels un ou plusieurs côtés du parallélogramme élastique sont rejetés à l'infini: le demiplan élastique, la bande plane élastique, le coin plan élastique, la demibande plane élastique. La solution du premier problème fondamental de la théorie de l'élasticité (conditions en tensions aux limites) peut être obtenue sous une forme unitaire pour tous ces domaines. On considère des cas de chargement avec des charges périodiques et avec des charges locales.

It is a well-known fact that the medical profession has been the subject of much criticism and attack in recent years. This is due to many causes, but one of the most important is the fact that the public has become more educated and more critical of the medical profession. This has led to a demand for more information and a more active role in the medical decision-making process.

THE MEDICAL PROFESSION

The medical profession has always been a subject of interest and controversy. In the past, the medical profession was often seen as a closed society, with its own rules and regulations. However, in recent years, the medical profession has become more open and more responsive to the needs of the public. This has led to a number of changes in the way that the medical profession operates, and these changes have been met with both praise and criticism.

One of the most important changes in the medical profession has been the increasing role of the patient. In the past, the patient was often seen as a passive recipient of medical care. However, in recent years, the patient has become more active and more involved in the medical decision-making process.

This change in the role of the patient has led to a number of changes in the way that the medical profession operates. For example, the medical profession has become more open to the input of the patient, and it has become more willing to accept the patient's wishes. This has led to a more patient-centered approach to medicine, and this has been met with both praise and criticism.

Another important change in the medical profession has been the increasing emphasis on prevention. In the past, the medical profession was often seen as a reactive profession, with its focus on treating disease. However, in recent years, the medical profession has become more proactive, with its focus on preventing disease.

This change in the focus of the medical profession has led to a number of changes in the way that the medical profession operates. For example, the medical profession has become more interested in the health of the community as a whole, and it has become more willing to accept the responsibility for preventing disease. This has led to a more public health approach to medicine, and this has been met with both praise and criticism.

ASUPRA ACȚIUNII SARCINILOR CONCENTRATE ÎN INTERIORUL UNOR DOMENII ELASTICE PLANE ÎNFINITE

N. ȘANDRU

1. Problema plană în cazul unui domeniu infinit, este o idealizare a unor cazuri reale, care prezintă interes deoarece poate folosi la studiul altor domenii, încărcate cu sarcini concentrate interioare, de exemplu, permițându-ne astfel studiul efectului local al acestor sarcini. Vom considera starea de tensiune corespunzătoare unor sarcini concentrate — forțe concentrate și momente concentrate — pentru planul elastic și semi-planul elastic.

Soluții ale acestor probleme se cunosc: fie utilizînd metoda integralelor Fourier [1], a transformatelor integrale [3], sau a funcțiilor lui Kolosov-Mushelișvili [4], [5].

Metoda de rezolvare indicată în acest articol revine la aproximarea sarcinilor concentrate cu forțe masice concentrate și reprezentarea acestora cu ajutorul funcției lui Dirac.

În cadrul teoriei distribuțiilor, aceste funcții generalizate pot fi reprezentate cu ajutorul integralelor duble Fourier [2], ceea ce ușurează posibilitățile de rezolvare practică a problemei.

2. Ecuațiile de echilibru ale unui element infinit mic dintr-un corp supus la o stare de tensiune plană, se scriu sub forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

unde $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$, $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$, $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$ sînt tensiunile și $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ sînt componentele forței masice.

Condiția de compatibilitate a lui B. de St. Venant se scrie în tensiuni sub forma

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \mu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)\tag{2}$$

unde μ este coeficientul de contracție transversală a lui Poisson.

La acestea se adaugă condițiile la limită, scrise în tensiuni, pentru un element de linie de normală exterioară $\bar{n}$.

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) \\ p_{ny} &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y), \end{aligned} \quad (3)$$

unde p_{nx} , p_{ny} sînt componentele sarcinii exterioare în punctul considerat.

Se știe [9], [10] că tensiunile se pot exprima sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X(x, y) dx \cdot \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int V(x, y) dy \cdot \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \end{aligned} \quad (4)$$

Funcția F verifică ecuația cu derivate parțiale

$$\Delta \Delta F = \int \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dy - \mu \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right), \quad (5)$$

deci va fi de forma

$$F(x, y) = \bar{F}(x, y) + F'(x, y). \quad (6)$$

unde $\bar{F}(x, y)$ este o funcție biarmonică

$$\Delta \Delta \bar{F} = 0. \quad (7)$$

iar $F'(x, y)$ este o integrală particulară a ecuației (5).

Ținînd seama de (4) și (6) vom putea scrie

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \bar{\sigma}_x + \sigma'_x \\ \sigma_y &= \bar{\sigma}_y + \sigma'_y \\ \tau_{xy} &= \bar{\tau}_{xy} + \tau'_{xy}, \end{aligned} \quad (8)$$

unde

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y^2}, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2}, \quad \bar{\tau}_{xy} = - \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x \partial y}, \quad (9)$$

și

$$\sigma'_x = \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2} - \int X dx, \quad \sigma'_y = \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} - \int V dy, \quad \tau'_{xy} = - \frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y} \quad (10)$$

semnele „barat” și „prim” avînd peste tot aceeași semnificație.

Dacă vom introduce sarcinile exterioare convenționale

$$\begin{aligned}\bar{p}_{nx} &= p_{nx} - p'_{nx} = p_{nx} - [\sigma'_x \cos(n, x) + \tau'_{xy} \cos(n, y)] \\ \bar{p}_{ny} &= p_{ny} - p'_{ny} = p_{ny} - [\tau'_{xy} \cos(n, x) + \sigma'_y \cos(n, y)],\end{aligned}\quad (11)$$

condițiile pe contur se vor putea scrie sub forma

$$\begin{aligned}\bar{p}_{nx} &= \bar{\sigma}_x \cos(n, x) + \bar{\tau}_{xy} \cos(n, y), \\ \bar{p}_{ny} &= \bar{\tau}_{xy} \cos(n, x) + \bar{\sigma}_y \cos(n, y),\end{aligned}\quad (12)$$

unde $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}_{xy}$, sînt tensiuni convenționale.

3. Fie planul elastic acționat de o forță concentrată de intensitate P , în origine, după direcția axei Ox .

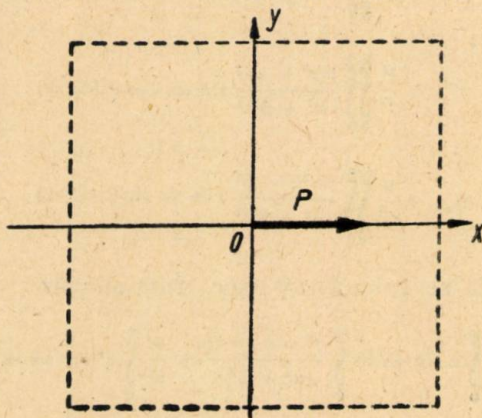


Fig. 1.

Reprezentăm forța concentrată de intensitate P prin integrala dublă Fourier

$$X(x, y) = \frac{P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta, \quad (13)$$

$$Y(x, y) = 0$$

Cu (13) ecuația (5) ia forma

$$\Delta \Delta F = - \frac{P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\beta^2 - \mu \alpha^2}{\alpha} \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta. \quad (14)$$

Soluția particulară a acestei ecuații o alegem de forma membrului drept, adică

$$F'(x, y) = \frac{P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} A(\alpha, \beta) \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \quad (15)$$

Înlocuind în (14) deducem pentru $A(\alpha, \beta)$ expresia

$$A(\alpha, \beta) = -\frac{\beta^2 - \mu\alpha^2}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad (16)$$

încît avem

$$(F'x, y) = -\frac{P}{\pi^2} \iint_0^\infty \frac{\beta^2 - \mu\alpha^2}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^2} \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \quad (17)$$

Ținînd seama de (10) obținem

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= -\frac{P}{\pi^2} \iint_0^\infty \frac{\alpha\beta^2(2 + \mu) + \alpha^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \sin \alpha x \beta y d\alpha d\beta \\ \sigma'_y &= \frac{P}{\pi^2} \iint_0^\infty \frac{\alpha\beta^2 - \mu\alpha^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \\ \tau'_{xy} &= \frac{P}{\pi^2} \iint_0^\infty \frac{\mu\alpha^2\beta - \beta^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (18)$$

Aceste integrale se calculează ușor. Într-adevăr

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= -\frac{P}{\pi^2} (2 + \mu) \int_0^\infty \alpha \sin \alpha x d\alpha \int_0^\infty \frac{\beta^2 \cos \beta y d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{P}{\pi^2} \int_0^\infty \alpha^3 \sin \alpha x d\alpha \int_0^\infty \frac{\cos \beta y}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\beta = \\ &= -\frac{P}{4\pi} (2 + \mu) \int_0^\infty \sin \alpha x e^{-\alpha y} (1 - \alpha y) d\alpha - \frac{P}{4\pi} \int_0^\infty \sin \alpha x e^{-\alpha y} (1 + \alpha y) d\alpha = \\ &= -\frac{P}{4\pi} (3 + \mu) \int_0^\infty \sin \alpha x e^{-\alpha y} d\alpha + \frac{P}{4\pi} (1 + \mu) y \int_0^\infty \alpha \sin \alpha x e^{-\alpha y} d\alpha = \\ &= -\frac{P}{4\pi} (3 + \mu) \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{P}{4\pi} (1 + \mu) \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Calculînd, în același fel, găsim

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= -\frac{Px}{4\pi(x^2 + y^2)^2} [(3 + \mu)x^2 + (1 - \mu)y^2] \\ \sigma'_y &= \frac{Px}{4\pi(x^2 + y^2)^2} [(1 - \mu)x^2 - (1 + 3\mu)y^2] \\ \tau'_{xy} &= -\frac{Py}{4\pi(x^2 + y^2)^2} [(3 + \mu)x^2 + (1 - \mu)y^2] \end{aligned} \quad (19)$$

În cazul planului elastic aceasta reprezintă soluția problemei, fiind regulată la infinit.

Pentru o forță concentrată aplicată în originea sistemului de axe, după direcția axei Oy, se obțin rezultate în mod analog.

4. Fie de asemenea planul elastic acționat de un moment concentrat M , în originea sistemului de axe.

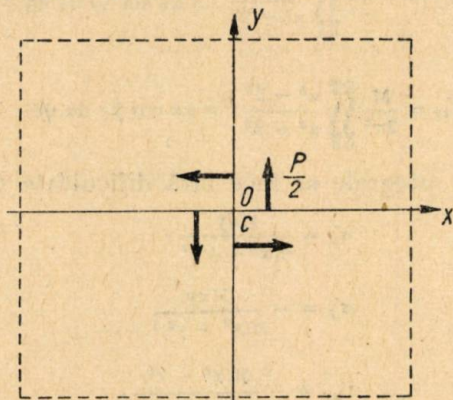


Fig. 2.

Vom putea obține un moment concentrat din acțiunea a patru forțe de intensități $\frac{P}{2}$ — ca în fig. 2. — notînd $M = \lim_{\substack{P \rightarrow \infty \\ c \rightarrow 0}} 2Pc$, c fiind distanța de la origine a punctului de aplicare a unei forțe.

Se obține

$$X(x, y) = -\frac{M}{2\pi^2} \iint_0^\infty \beta \cos \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta. \quad (20)$$

$$Y(x, y) = \frac{M}{2\pi^2} \iint_0^\infty \alpha \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta.$$

Cu aceasta ecuația (5) are forma

$$\Delta \Delta F = \frac{M}{2\pi^2} \iint_0^\infty \frac{\beta^4 - \alpha^4}{\alpha\beta} \sin \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta. \quad (21)$$

Soluția particulară a acestei ecuații neomogene are forma

$$F'(x, y) = \frac{M}{2\pi^2} \iint_0^\infty \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \sin \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta. \quad (22)$$

Încît, după (10), avem

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \frac{M}{\pi^2} \iint_0^\infty \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta, \\ \sigma'_y &= -\frac{M}{\pi^2} \iint_0^\infty \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta, \\ \tau'_{xy} &= \frac{M}{2\pi^2} \iint_0^\infty \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta.\end{aligned}\quad (23)$$

Calculul acestor integrale se face fără dificultate și se obține

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \frac{Mxy}{\pi(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma'_y &= -\frac{Mxy}{\pi(x^2 + y^2)^2}, \\ \tau'_{xy} &= -\frac{M(x^2 - y^2)}{2\pi(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}\quad (24)$$

Această soluție particulară reprezintă soluția problemei ea fiind regulată la infinit.

5. Vom considera acum semiplanul elastic acționat de o forță concentrată de intensitate P , aplicată în punctul $(0, b)$, pe direcția pozitivă a axei Ox .

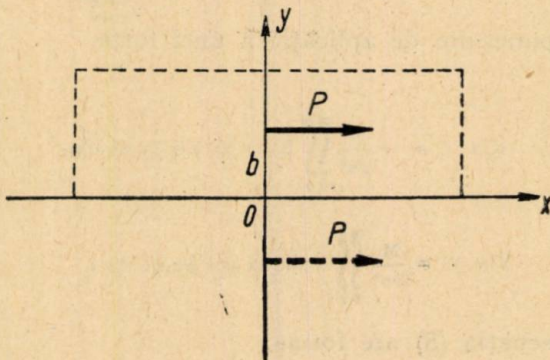


Fig. 3.

Dacă introducem tot pe direcția axei Ox , o forță P , în punctul $(0, -b)$, găsim pentru componentele forței masice următoarea reprezentare

$$\begin{aligned}X(x, y) &= \frac{2P}{\pi^2} \iint_0^\infty \cos \beta b \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta \\ Y(x, y) &= 0.\end{aligned}\quad (25)$$

Cu aceasta ecuația (5) are forma

$$\Delta \Delta F = \frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \cos\beta b \sin\alpha x \cos\beta y \, d\alpha \, d\beta, \quad (26)$$

soluția particulară a acestei ecuații fiind

$$F'(x, y) = \frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu\alpha^2 - \beta^2}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos\beta b \sin\alpha x \cos\beta y \, d\alpha \, d\beta. \quad (27)$$

După (10) vom avea

$$\sigma'_x = -\frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{(2 + \mu)\alpha\beta^2 + \alpha^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos\beta b \sin\alpha x \cos\beta y \, d\alpha \, d\beta$$

$$\sigma'_y = -\frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu\alpha^3 - \alpha\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos\beta b \sin\alpha x \cos\beta y \, d\alpha \, d\beta \quad (28)$$

$$\tau'_{xy} = \frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu\alpha^2\beta - \beta^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos\beta b \cos\alpha x \sin\beta y \, d\alpha \, d\beta.$$

Pe frontiera $y = 0$ avem o sarcină normală locală

$$\bar{P}(x) = \frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu\alpha^3 - \alpha\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos\beta b \sin\alpha x \, d\alpha \, d\beta \quad (29)$$

pentru care alegem funcția lui Airy de forma (vezi [7])

$$\bar{F}(x, y) = -\frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu\alpha^3 - \alpha\beta^2}{\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)^2} (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \cos\beta b \sin\alpha x \, d\alpha \, d\beta. \quad (30)$$

Aceasta dă naștere la următoarea stare de tensiune

$$\bar{\sigma}_x = \frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu\alpha^3 - \alpha\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos\beta b \sin\alpha x \, d\alpha \, d\beta,$$

$$\bar{\sigma}'_y = \frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu\alpha^3 - \alpha\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \cos\beta b \sin\alpha x \, d\alpha \, d\beta, \quad (31)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\frac{2P}{\pi^2} y \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu\alpha^4 - \alpha^2\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} e^{-\alpha y} \cos\beta b \cos\alpha x \, d\alpha \, d\beta.$$

Din (28) și (31), prin integrare, se obține

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \frac{P}{4\pi} \left\{ \frac{2(1+\mu)x(b+y)^2}{[x^2+(b+y)^2]^2} + \frac{2(1+\mu)x(b-y)^2}{[x^2+(b-y)^2]^2} - \frac{(3+\mu)x}{x^2+(b+y)^2} - \frac{(3+\mu)x}{x^2+(b-y)^2} \right\}, \\ \sigma'_y &= -\frac{P}{4\pi} \left\{ \frac{2(1+\mu)x(b+y)^2}{[x^2+(b+y)^2]^2} + \frac{2(1+\mu)x(b-y)^2}{[x^2+(b-y)^2]^2} - \frac{(1-\mu)x}{x^2+(b+y)^2} - \frac{(1-\mu)x}{x^2+(b-y)^2} \right\}, \\ \tau'_{xy} &= \frac{P}{4\pi} \left\{ \frac{(b+y)[\mu(b+y)^2 - (2+\mu)x^2]}{[x^2+(b+y)^2]^2} + \frac{(b-y)[- \mu(b-y)^2 + (2+\mu)x^2]}{[x^2+(b-y)^2]^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b+y}{x^2+(b+y)^2} + \frac{b-y}{x^2+(b-y)^2} \right\},\end{aligned}\quad (32)$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \frac{P}{2\pi} x \left\{ \frac{\mu-1}{x^2+(b+y)^2} + \frac{2(b+y)(b\mu-\mu y+b-y)}{[x^2+(b+y)^2]^2} - \frac{2b(1+\mu)y[3(b+y)^2-x^2]}{[x^2+(b+y)^2]^3} \right\}, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{P}{2\pi} x \left\{ \frac{\mu-1}{x^2+(b+y)^2} + \frac{2(b+y)(b\mu+\mu y+b-y)}{[x^2+(b+y)^2]^2} + \frac{2b(1+\mu)y[3(b+y)^2-x^2]}{[x^2+(b+y)^2]^3} \right\}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{P}{2\pi} y \left\{ \frac{(1-\mu)[(b+y)^2-x^2]}{[x^2+(b+y)^2]^2} - \frac{2b(1+\mu)(b+y)[(b+y)^2-3x^2]}{[x^2+(b+y)^2]^3} \right\}.\end{aligned}\quad (33)$$

Soluția problemei va fi după (8)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{P}{4\pi} x \left\{ \frac{2(3+\mu)(b+y)^2+4\mu(b^2-y^2)}{[x^2+(b+y)^2]^2} + \frac{(\mu-1)(b-y)^2-(3+\mu)x^2}{[x^2+(b-y)^2]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu-5}{x^2+(b+y)^2} - \frac{4b(1+\mu)y[3(b+y)^2-x^2]}{[x^2+(b+y)^2]^3} \right\}, \\ \sigma_y &= \frac{P}{4\pi} x \left\{ \frac{2(\mu-1)(b+y)^2+4(b^2-y^2)}{[x^2+(b+y)^2]^2} - \frac{(1+3\mu)(b-y)^2-(1-\mu)x^2}{[x^2+(b-y)^2]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu-1}{x^2+(b-y)^2} + \frac{4b(1+\mu)y[3(b+y)^2-x^2]}{[x^2+(b+y)^2]^3} \right\}, \\ \tau_{xy} &= \frac{P}{4\pi} \left\{ \frac{(\mu-1)(b+y)^3+2(1-\mu)y(b+y)^2-(3+\mu)x^2(b+y)-2(1-\mu)x^2y}{[x^2+(b+y)^2]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\mu)(b-y)^3+(3+\mu)x^2(b-y)}{[x^2+(b-y)^2]^2} - \frac{4b(1+\mu)(b+y)y[(b+y)^2-3x^2]}{[x^2+(b+y)^2]^3} \right\},\end{aligned}\quad (34)$$

În cazul $b = 0$ obținem rezultatele din cazul acțiunii unei forțe concentrate tangențială, de intensitate P , pe frontiera semiplanului elastic în originea sistemului de axe.

6. Fie de asemenea semiplanul elastic acționat de o forță concentrată, de intensitate P , aplicată în punctul $(0, b)$ pe direcția pozitivă a axei Oy .

Dacă introducem tot pe direcția axei Oy o forță P , în punctul $(0, -b)$, găsim pentru componentele forței masice următoarea reprezentare

$$X(x, y) = 0$$

(35)

$$Y(x, y) = \frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \cos \beta b \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta.$$

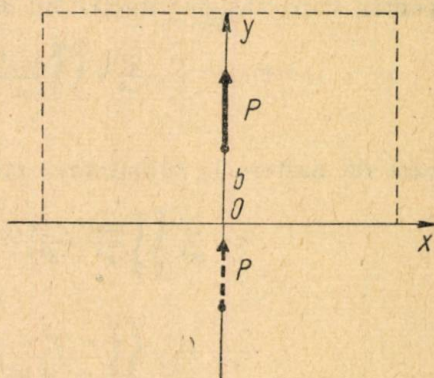


Fig. 4.

Cu aceasta ecuația (5) are forma

$$\Delta \Delta F = \frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu \beta^2 - \alpha^2}{\beta} \cos \beta b \cos \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta. \quad (36)$$

Iar soluția particulară a acestei ecuații va fi

$$F'(x, y) = \frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu \beta^2 - \alpha^2}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \beta b \cos \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta. \quad (37)$$

Încît, după (10), vom avea

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= -\frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu \beta^3 - \alpha^2 \beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \beta b \cos \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta, \\ \sigma'_y &= -\frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{(2 + \mu) \alpha^2 \beta + \beta^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \beta b \cos \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta, \\ \tau'_{xy} &= \frac{2P}{\pi^2} \iint_{00}^{\infty\infty} \frac{\mu \alpha \beta^2 - \alpha^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \beta b \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta. \end{aligned} \quad (38)$$

Pe frontiera $y = 0$ acționează sarcina tangențială locală

$$\bar{t}(x) = -\frac{2P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\mu\alpha\beta^2 - \alpha^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cos \beta b \sin \alpha x \, d\alpha \, d\beta. \quad (39)$$

pentru care alegem funcția lui Airy de forma (vezi [7])

$$\bar{F}(x, y) = -\frac{2P}{\pi^2} y \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\mu\alpha\beta^2 - \alpha^3}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^2} e^{-\alpha y} \cos \beta b \cos \alpha x \, d\alpha \, d\beta, \quad (40)$$

care dă naștere la următoarea stare de tensiune

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{2P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\mu\alpha\beta^2 - \alpha^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} (2 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \beta b \cos \alpha x \, d\alpha \, d\beta, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{2P}{\pi^2} y \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\mu\alpha^2\beta^2 - \alpha^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} e^{-\alpha y} \cos \beta b \cos \alpha x \, d\alpha \, d\beta, \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{2P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\mu\alpha\beta^2 - \alpha^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \beta b \sin \alpha x \, d\alpha \, d\beta. \end{aligned} \quad (41)$$

Din (38) și (41), se obține, prin integrare

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \frac{P}{4\pi} \left\{ \frac{(1 - \mu)(b + y)}{x^2 + (b + y)^2} - \frac{(1 - \mu)(b - y)}{x^2 + (b - y)^2} - \frac{2(1 + \mu)x^2(b + y)}{[x^2 + (b + y)^2]^2} + \frac{2(1 + \mu)x^2(b - y)}{[x^2 + (b - y)^2]^2} \right\} \\ \sigma'_y &= \frac{P}{4\pi} \left\{ -\frac{(3 + \mu)(b + y)}{x^2 + (b + y)^2} + \frac{(3 + \mu)(b - y)}{x^2 + (b - y)^2} + \frac{2(1 + \mu)x^2(b + y)}{[x^2 + (b + y)^2]^2} - \frac{2(1 + \mu)x(b - y)^2}{[x^2 + (b - y)^2]^2} \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\tau'_{xy} = \frac{P}{4\pi} \left\{ \frac{(\mu - 1)x}{x^2 + (b + y)^2} + \frac{(\mu - 1)x}{x^2 + (b - y)^2} - \frac{2(1 + \mu)x(b + y)^2}{[x^2 + (b + y)^2]^2} - \frac{2(1 + \mu)x(b - y)^2}{[x^2 + (b - y)^2]^2} \right\}.$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{2(\mu - 1)(b + y)}{x^2 + (b + y)^2} + \frac{(y - \mu y - 2b - 2b\mu)[(b + y)^2 - x^2]}{[x^2 + (b + y)^2]^2} + \frac{2b(1 + \mu)y(b + y)[(b + y)^2 - 3x^2]}{[x^2 + (b + y)^2]^3} \right\} \quad (43)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{P}{2\pi} y \left\{ \frac{(\mu - 1)[(b + y)^2 - x^2]}{[x^2 + (b + y)^2]^2} - \frac{2b(1 + \mu)(b + y)[(b + y)^2 - 3x^2]}{[x^2 + (b + y)^2]^3} \right\}$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{P}{2\pi} x \left\{ \frac{1 - \mu}{x^2 + (b - y)^2} + \frac{2(\mu b + \mu y + b - y)(b + y)}{[x^2 + (b + y)^2]^2} - \frac{2b(1 + \mu)y[3(b + y)^2 - x^2]}{[x^2 + (b + y)^2]^3} \right\}$$

Soluția problemei va fi după (8)

$$\begin{aligned}\sigma_x = & \frac{P}{4\pi} \left\{ \frac{3(\mu - 1)(b + y)}{x^2 + (b + y)^2} + \frac{2(b + y)^2 [(1 - \mu)y - 2b(1 + \mu)] - 2x^2[2y - b(1 + \mu)]}{[x^2 + (b + y)^2]^2} + \right. \\ & \left. + \frac{x^2(b - y)(1 + 3\mu) + (b - y)^3(\mu - 1)}{[x^2 + (b - y)^2]^2} + \frac{4b(1 + \mu)y(b + y)[(b + y)^2 - 3x^2]}{[x^2 + (b + y)^2]^3} \right\} \\ \sigma_y = & \frac{P}{4\pi} \left\{ \frac{-(3 + \mu)(b + y)}{x^2 + (b + y)^2} + \frac{2(\mu - 1)y(b + y)^2 + 2x^2[(1 + \mu)(b + y) + (1 - \mu)y]}{[x^2 + (b + y)^2]^2} + \right. \\ & \left. + \frac{x^2(b - y)(1 - \mu) + (b - y)(b + y)^2(3 + \mu)}{[x^2 + (b - y)^2]^2} - \frac{4b(1 + \mu)y(b + y)[(b + y)^2 - 3x^2]}{[x^2 + (b + y)^2]^3} \right\} \\ \tau_{xy} = & \frac{P}{4\pi} x \left\{ \frac{1 - \mu}{x^2 + (b + y)^2} + \frac{2(b + y)[b(1 + \mu) + y(\mu - 3)]}{[x^2 + (b + y)^2]^2} + \frac{x^2(\mu - 1) - (b - y)^2(3 + \mu)}{[x^2 + (b - y)^2]^2} - \right. \\ & \left. - \frac{4b(1 + \mu)y[3(b + y)^2 - x^2]}{[x^2 + (b + y)^2]^3} \right\}\end{aligned}\quad (44)$$

În cazul $b = 0$ obținem rezultatele din cazul acțiunii unei forțe concentrată normală, pe frontiera semiplanului în originea sistemului de axe, de intensitate P .

7. Vom studia acum semiplanul elastic acționat de un moment concentrat M în punctul $(0, b)$.

Dacă introducem un moment $-M$, în punctul $(0, -b)$, găsim pentru componentele forței masice următoarea reprezentare.

$$X(x, y) = \frac{M}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \beta \sin \beta b \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta \quad (45)$$

$$Y(x, y) = \frac{M}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \sin \beta b \sin \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta$$

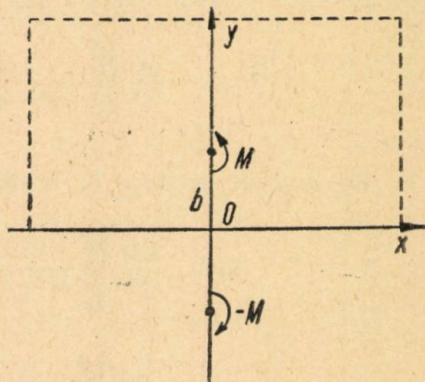


Fig. 5.

Cu aceasta ecuația (5) are forma

$$\Delta \Delta F = \frac{M}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha \beta} \sin \beta b \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta, \quad (46)$$

care are soluția particulară

$$F'(x, y) = \frac{M}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \sin \beta b \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta \quad (47)$$

Încît, după (10), avem

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= -\frac{2M}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \beta b \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta \\ \sigma'_y &= \frac{2M}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \beta b \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta \\ \tau'_{xy} &= \frac{M}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \beta b \cos \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta \end{aligned} \quad (48)$$

Pe frontiera $y = 0$ acționează sarcina normală locală

$$\bar{p}(x) = -\frac{2M}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \beta b \sin \alpha x \, d\alpha \, d\beta \quad (49)$$

pentru care alegem funcția lui Airy de forma (vezi [7])

$$\bar{F}(x, y) = \frac{2M}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \sin \beta b \sin \alpha x \, d\alpha \, d\beta. \quad (50)$$

Aceasta dă naștere la următoarea stare de tensiune

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -\frac{2M}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (1 - \alpha y) e^{-\alpha y} \sin \beta b \sin \alpha x \, d\alpha \, d\beta, \\ \bar{\sigma}_y &= -\frac{2M}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (1 + \alpha y) e^{-\alpha y} \sin \beta b \sin \alpha x \, d\alpha \, d\beta, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{2M}{\pi^2} y \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha y} \sin \beta b \cos \alpha x \, d\alpha \, d\beta. \end{aligned} \quad (51)$$

Din (48) și (51), se obține, prin integrare

$$\sigma'_x = -\frac{Mx(b+y)}{\pi[x^2 + (b+y)^2]^2} - \frac{Mx(b-y)}{\pi[x^2 + (b-y)^2]^2},$$

$$\sigma'_y = \frac{Mx(b+y)}{\pi[x^2 + (b+y)^2]^2} + \frac{Mx(b-y)}{\pi[x^2 + (b-y)^2]^2}, \quad (52)$$

$$\tau'_{xy} = \frac{M[(b-y)^2 - x^2]}{2\pi[x^2 + (b-y)^2]^2} - \frac{M[(b+y)^2 - x^2]}{2\pi[x^2 + (b+y)^2]^2},$$

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{2Mx(b+y)}{\pi[x^2 + (b+y)^2]^2} + \frac{2Mxy[3(b+y)^2 - x^2]}{[x^2 + (b+y)^2]^3},$$

$$\bar{\sigma}_y = -\frac{2Mx(b+y)}{\pi[x^2 + (b+y)^2]^2} - \frac{2Mxy[3(b+y)^2 - x^2]}{[x^2 + (b+y)^2]^3}, \quad (53)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{2My(b+y)[(b+y)^2 - 3x^2]}{[x^2 + (b+y)^2]^3}.$$

Soluția problemei va fi, după (8)

$$\sigma_x = \frac{M}{\pi} \times \left\{ \frac{2y[3(b+y)^2 - x^2]}{[x^2 + (b+y)^2]^3} - \frac{3(b+y)}{[x^2 + (b+y)^2]^2} - \frac{b-y}{[x^2 + (b-y)^2]^2} \right\},$$

$$\sigma_y = \frac{M}{\pi} \times \left\{ -\frac{2y[3(b+y)^2 - x^2]}{[x^2 + (b+y)^2]^3} - \frac{b+y}{[x^2 + (b+y)^2]^2} + \frac{b-y}{[x^2 + (b-y)^2]^2} \right\}, \quad (54)$$

$$\tau_{xy} = \frac{M}{2\pi} \left\{ \frac{4y(b+y)[(b+y)^2 - 3x^2]}{[x^2 + (b+y)^2]^3} + \frac{(b-y)^2 - x^2}{[x^2 + (b-y)^2]^2} - \frac{(b+y)^2 - x^2}{[x^2 + (b+y)^2]^2} \right\}.$$

În cazul $b = 0$ obținem rezultatele din cazul acțiunii unui moment concentrat M pe frontiera semiplanului în originea sistemului de axe.

BIBLIOGRAFIE

1. K. Girkmann: *Angriff von Einzellasten in der vollen Ebene in der Halbebende*, Ing. Arch. 1940 nr. 11, p. 415.
2. И. М. Гелфанд, Т. Е. Шилов: *Обобщенные функции и действия над ними*, Изд. второе. физматгиз, Москва, 1959.
3. Sneddon J.: *Fourier Transforms*, New York-Toronto-London 1951.
4. Szelagowski F.: *A Semi-infinite Plate Acted on by a Concentrated Force*, Bull. Acad. Polon. Sci. ser. sci. techn. 8, 1960. 77.
5. Szelagowski F.: *The Action of a Concentrated Moment on a Halfplane Disc*, Bull. Acad. Polon. Sci. ser. sci. techn. 7, 1959, 503.

6. Мусхелшвили Н. И.: *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Изд. Акад. Наук С.С.С.Р. Москва, 1954.
7. Teodorescu P. P.: *Probleme plane în teoria elasticității*, vol. I. Ed. Acad. R.P.R. 1961.
8. Teodorescu P. P.: *O metodă de rezolvare a problemei plane a teoriei elasticității în cazul unor forțe masice oarecare*, Comunic. Acad. R.P.R. t. 6. nr. 2. 1956.
9. Teodorescu P. P.: *Asupra problemei plane a teoriei elasticității în cazul unor forțe masice oarecare*, Bul. ști. Acad. R.P.R., sect. de št. mat. și fiz. 1957, t. 9, nr. 2, p. 481.
10. Teodorescu P. P.: *Funcții de tensiune în problema plană a teoriei elasticității*, Studii și cercet. Șt. Mat. (Iași) 1960, fasc. 2. p. 363.

О ДЕЙСТВИИ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ НАГРУЗОК ВНУТРИ ПЛОСКИХ УПРУГИХ БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе рассматривается задача о действии концентрированных сил и моментов внутри упругой плоскости и полуплоскости. Концентрированные силы заменяются массовыми концентрированными силами с помощью двойных интегралов Фурье. С математической точки зрения задачи сводятся к решению неоднородного бигармонического уравнения. Частное решение ищется в форме правой части этого уравнения. Задача сводится к интегрированию бигармонического уравнения с граничными условиями, выраженными в условных напряжениях (12), данных на границе.

SUR L'ACTION DES CHARGES CONCENTRÉES À L'INTÉRIEUR DE QUELQUES DOMAINES PLANS INFINIS

R É S U M É

On étudie l'action des forces et des moments concentrés à l'intérieur du plan ou du demi-plan élastique. Les charges concentrées sont approximées avec des forces massiques concentrées, représentées à l'aide d'intégrales doubles de Fourier. Du point de vue mathématique, le problème est réduit à l'intégration d'une équation biharmonique nonhomogène (5). On recherche une intégrale particulière qui ait la même forme que le membre droit de cette équation.

On arrive donc à intégrer l'équation biharmonique avec certaines conditions aux limites, exprimées à l'aide des tensions conventionnelles (12) sur la frontière du domaine.

APLICAREA UNEI METODE SEMIINVERSE LA MIȘCĂRILE CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ DIN HIDRODINAMICA SUBTERANĂ

ELENA UNGUREANU

§ 1. O serie de probleme din hidrodinamica subterană plană, și în general problemele plane din fizica matematică, impun, printre altele, și folosirea metodei reprezentării conforme a domeniului din planul fizic $z(=x + iy)$ pe un domeniu dintr-un plan ajutător ζ pentru a ușura rezolvarea problemei (de exemplu [4]).

Această metodă este cunoscută sub mai multe aspecte și anume: problema directă, folosită în cazul că se cunoaște domeniul din planul fizic și domeniul corespunzător din planul potențialului complex. Relația prin care efectuăm această reprezentare ne determină mișcarea fluidului din planul fizic [1]. În funcție de problemă, reprezentarea se poate face și pe un domeniu din alt plan cum ar fi, de exemplu, planul vitezei complexe.

Se știe că dacă nu putem elimina variabila ajutătoare ζ pentru a găsi explicit relația ce ne interesează, atunci soluția problemei este dată sub formă parametrică.

În problema inversă, domeniul din planul fizic este necunoscut la început și se determină a posteriori, făcând trecerea de la domeniul din planul potențialului complex sau planul vitezei complexe, care este cunoscut prin condițiile date mișcării, la domeniul din planul fizic [5].

În cazul că toate aceste reprezentări nu se pot face dintr-o dată, se folosește metoda reprezentărilor conforme succesive, luând mai multe plane ajutătoare (de exemplu [2]).

O altă metodă este așa-zisa metodă semi-inversă. Ea a fost exemplificată pe câteva probleme din hidrodinamica plană în [3]. Metoda constă în aceea că se pleacă de la domeniul din planul fizic, a cărui frontieră este numai parțial cunoscută, la un domeniu dintr-un plan ajutător în care porțiunile necunoscute ale frontierei se transformă în arce oarecare de curbă. Aceste arce din planul ajutător se iau de o formă convenabilă și revenind la planul fizic se determină porțiunile necunoscute. Variind convenabil unii coeficienți ce intră în transformări, pentru aproxima unele domenii date din planul fizic.

În lucrarea de față vom extinde această metodă la câteva probleme cu suprafață liberă din teoria mișcărilor plane a apelor subterane.

§ 2. Vom presupune că avem o mișcare cu suprafață liberă într-un domeniu în care conturul de alimentare și conturul impermeabil sînt numai parțial cunoscute apriori și sînt reprezentate prin două arce de curbă continue.

Se știe că în problemele cu suprafață liberă se folosește funcția lui Jukovski, definită prin relația :

$$J = f - ikz \quad (1)$$

în cazul că se ia axa oy după verticala ascendentă ([6], pag. 143). Dacă domeniul corespunzător D din planul J are o formă simplă și putem găsi relația dintre J și f , din (1) rezultă z ca funcție de f . În mod frecvent, pentru a găsi această relație, se folosesc reprezentările conforme ale lui f și J pe un semiplan.

Vom considera în planul J un domeniu D astfel încît $D_J \subset D$, frontierele Γ și Γ_J avînd în general porțiuni comune $B_1A_2, B_2A_3, \dots, B_nA_1$. Aceste porțiuni comune corespund la porțiuni cunoscute în planul z . Domeniul D este ales în așa fel încît reprezentarea lui conformă pe semiplan să se facă foarte simplu. Fie

$$J = G_1(t_1) \quad (2)$$

relația care ne reprezintă domeniul D pe semiplanul superior din planul variabilei complexe t_1 . Atunci în planul t_1 , domeniul D_J va fi reprezentat prin semiplanul superior minus domeniile $D_{11}, D_{12}, \dots, D_{1n}$ cuprinse

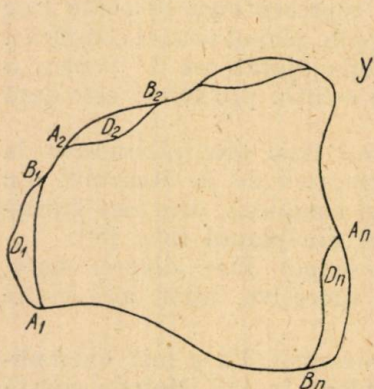


Fig. 1.

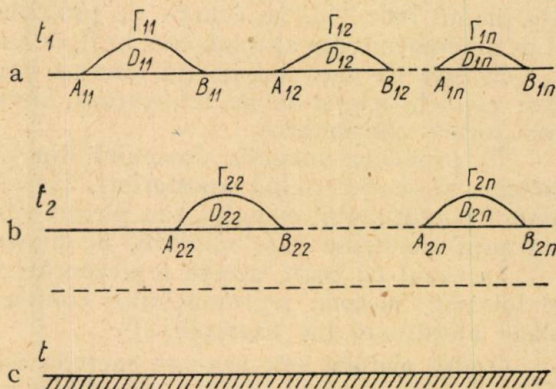


Fig. 2

între axa reală și arcele $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \dots, \Gamma_{1n}$ cu extremitățile $A_{11}, B_{11}, A_{12}, B_{12}, \dots$, imaginile punctelor $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ din planul J (fig. 2, a).

Ne fixăm atenția, de exemplu, asupra domeniului D_{11} și vom efectua reprezentarea conformă a semiplanului superior minus D_{11} pe semiplanul superior al variabilei complexe t_2 prin relația :

$$t_1 = G_2(t_2) \quad (3)$$

Astfel obținem ca imagine a lui D_J semiplanul superior minus domeniile $D_{22}, D_{23}, \dots, D_{2n}$ (fig. 2, b). Repetind procedeul, vom ajunge pînă la urmă la semiplanul superior al variabilei complexe t (fig. 2, c) prin șirul de relații:

$$\begin{aligned} t_2 &= G_3(t_3) \\ &\vdots \\ t_{n-1} &= G_n(t_n) \\ t_n &= G(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Condițiile la limită în planul fizic z sînt $\operatorname{Re}\{f\} = \text{const.}$ pe o suprafață de alimentare și $\operatorname{Im}\{f\} = \text{const.}$ pe suprafețele impermeabile și pe suprafața liberă, deci domeniul D_f în planul f este același pentru ambele domenii din planul fizic ce corespund la D și D_J . Cu ajutorul formulei lui Schwarz—Christoffel putem reprezenta domeniul D_f pe semiplanul superior al variabilei complexe ζ . Prin aceasta, cele trei puncte caracteristice ale mișcării (punctele de intersecție dintre curbele $\varphi = \text{const.}$ și $\psi = \text{const.}$ și punctul de la infinit) vor veni în trei puncte oarecare P_1, P_2, P_3 . Printr-o transformare lineară

$$t = H(\zeta) \quad (5)$$

vom face ca ele să coincidă în planele t și ζ . Putem obține astfel soluția problemei, adică pe f și pe z din (1) în funcție de ζ .

Subliniem că putem găsi mișcări, folosind metoda semi-inversă pentru variabila J , fără a ne impune de la început forma domeniului din planul fizic.

§ 3. Vom concretiza cele spuse mai sus mai întîi pe problema lui Jukovski. În cazul clasic se consideră frontiera de alimentare AB ca fiind rectilinie de-a lungul axei ox , iar frontiera impermeabilă B C D așezată de-a lungul axei oy . Aici vom considera că A B se compune din porțiuni ale axei reale și arce de curbă oarecare Γ_i ($i = 1, \dots, l$), necunoscute încă, și B C D de asemenea din porțiuni ale axei oy și arce Γ_j ($j = l + 1, \dots, l + n$) necunoscute. Pentru a fixa ideile, vom presupune că punctul B rămîne în origine, iar D va avea o poziție oarecare pe axa imaginară, funcție de distanța B C și de forma frontierelor (fig. 3) Urmează că și suprafața liberă D A se va modifica față de cazul clasic.

Problema este de a determina potențialul mișcării apelor subterane cu următoarele condiții la limită: pe frontiera de alimentare A B avem $\varphi = \text{const.} = -kH$ pe frontiera impermeabilă B C D, $\psi = 0$ și pe suprafața liberă D A tot $\psi = 0$.

În planul lui Jukovski, domeniului mișcării din cazul clasic îi corespunde o semibandă. În cazul considerat de noi, imaginea D_J a domeniului mișcării va fi semibanda minus niște domenii D_j ($j = 1, 2, \dots, l + n$).

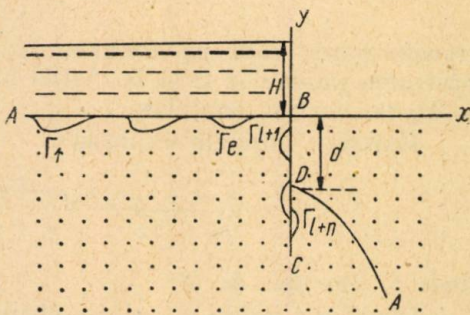


Fig. 3.

Transformarea care ne reprezintă conform semibanda pe semiplanul superior al variabilei complexe t_1 astfel încît punctele D și B să vină în -1 și 1 , este :

$$J_s = -k \frac{H + h_c}{\pi} \arcsin t_1 - k \frac{H - h_c}{2} \quad (6)$$

Arcele Γ_i ($i = 1, 2, \dots, l + n$) se vor transforma în arcele Γ_{1i} . Imaginea lui D_j va fi semiplanul $\text{Im}\{t_1\} > 0$ minus domeniile D_{1i} . Luînd acum arcele necunoscute Γ_{1i} de o formă convenabilă, vom reprezenta conform acest domeniu pe semiplanul superior dintr-un plan ajutător t cu păstrarea punctelor $D(-1)$ și $B(1)$.

Pe același semiplan $\text{Im}\{t\} > 0$ reprezentăm și domeniul D_f :

$$f_s = -i \frac{k(H + h_c + d)}{\sqrt{2}} \sqrt{t - 1} - k H \quad (7)$$

Avînd pe f și J în funcție de t , din relația (1) se obține

$$z = z(t)$$

De aci se află forma suprafeței libere. De asemenea se află și forma arcelor Γ_i din planul fizic.

Ca un exemplu, presupunem că în planul t_1 , domeniul D_j va fi reprezentat prin semiplanul superior minus semicercul $|t_1 - b| = c$, care se află la dreapta punctului $D(-1)$ și nu conține în interior punctele D și B.

Fie

$$t_1 = \frac{(b^2 - 1 - c^2)(t + b) + \sqrt{(b^2 - 1 - c^2)^2 t^2 + 2tb(b^2 - 1 - c^2)(1 - c^2 - b^2) + 4c^2(b^2 - 1) + b^2(b^2 - 1 - c^2)^2}}{2(b^2 - 1)} \quad (8)$$

transformarea care ne conduce la semiplanul superior $\text{Im}\{t\} > 0$, cu păstrarea punctelor D și B. Astfel avem reprezentarea conformă a lui D_j și D_f pe același semiplan.

Pentru z obținem expresia :

$$iz = -i \frac{H + h_c + d}{\sqrt{2}} \sqrt{t - 1} - \frac{H + h_c}{2} + \frac{H + h_c}{\pi} \arcsin t_1 \quad (9)$$

unde t_1 este dat de (8).

Dînd lui t valori < -1 se obține ecuația suprafeței libere, iar pentru t cuprins între

$$\frac{(b - 2c)(b^2 - 1) + bc}{b^2 - 1 - c^2} \text{ și } \frac{(b + 2c)(b^2 - 1) + bc^2}{b^2 - 1 - c^2}$$

(imaginile capetelor semicercului $|t_1 - b| = c$) se obține arcul Γ .

Notînd $x = X(H + bc + d)$, $y = Y(H + h_c + d)$, $H + h_c = a(H + h_c + d)$, ecuația suprafeței libere se scrie sub forma :

$$\begin{aligned} -2(b^2 - 1) \operatorname{ch} \frac{\Pi X}{a} &= (b^2 - 1 - c^2) (1 - 2a + b + 4a Y - 2Y^2) - \\ &- [4(b^2 - 1 - c^2)^2 Y^4 - 16a(b^2 - 1 - c^2)^2 Y^3 + \\ &+ 4Y^2(b^2 - 1 - c^2) [(b^2 - 1 - c^2)(6a^2 - 1) - b(1 - c^2 - b^2)] + \\ &+ 8aY(b^2 - 1 - c^2) [(b^2 - 1 - c^2)(1 - 2a^2) + b(1 - c^2 - b^2)] + \\ &+ (b^2 - 1 - c^2)^2 (1 - 2a^2)^2 + 2b(b^2 - 1 - c^2)(1 - c^2 - b^2)(1 - 2a^2) + \\ &+ 4c^2(b^2 - 1) + b^2(b^2 - 1 - c^2)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Cum suprafața liberă se obține pentru valorile lui $t < -1$, deci la stînga imaginii semicercului $|t_1 - b| = c$, se ia ramura negativă a radicalului.

Se observă că ecuația este verificată de $X = 0$, $Y = a - 1$, adică de punctul D.

Dacă se consideră că semicercul din planul t_1 este la dreapta lui B, imaginea lui în planul fizic va fi o porțiune a suprafeței de alimentare. Fie $b = 3$ și $c = 1$. Atunci expresia lui z devine :

$$iz = -i \frac{H + h_c + d}{\sqrt{2}} \sqrt{t - 1} - \frac{H + h_c}{2} + \frac{H + h_c}{\Pi} \operatorname{arc} \sin \frac{7(t + 3) + \sqrt{49t^2 - 378t + 473}}{16}$$

Ecuația suprafeței libere este :

$$-8 \operatorname{ch} \frac{\Pi X}{a} = 14 - 7a^2 + 14aY - 7Y^2 -$$

$$-\sqrt{49Y^4 - 196aY^3 + 14(21a^2 + 10)Y^2 - 28a(7a^2 + 10)Y + 196a^4 + 560a^2 + 144}$$

și ea se găsește reprezentată în fig. 4 prin curba C_1 .

Relația de dependență între d și l se află, ca și în cazul clasic, din condiția ca viteza în punctul C să fie infinită ([6] pag. 145).

Pentru $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{1}{4}$ arcu Γ este o porțiune a frontierei impermeabile și i găsim :

$$iz = -i \frac{H + h_c + d}{\sqrt{2}} \sqrt{t - 1} - \frac{H + h_c}{2} + \frac{H + h_c}{\Pi} \operatorname{arc} \sin \frac{(t + 0,75) + \sqrt{t^2 - 1,14t + 0,12}}{1,76}$$

iar ecuația suprafeței libere va fi :

$$0,88 \operatorname{ch} \frac{\Pi X}{a} = -0,88 + a^2 - 2aY + Y^2 +$$

$$+ \sqrt{Y^4 - 4aY^3 + 2(3a^2 - 0,22)Y^2 - 4a(a^2 - 0,22)Y + a^4 - 0,43a^2}$$

și este reprezentată prin curba C_2 .

Dacă se consideră că $b = 0$ și $c = 1$, atunci întreaga frontieră impermeabilă se va modifica. În acest caz însă nu se mai poate preciza că viteza în punctul C este infinită. Avînd însă dată ordonata acestui punct,

$y = -l$, se va putea determina poziția punctului D de viteză nulă, avînd o condiție în plus (de exemplu, ca punctul C să corespundă pentru un anumit t , sau ca viteza în acest punct să fie dată).

Expresia lui z este :

$$iz = -i \frac{H + h_c + d}{\sqrt{2}} \sqrt{t-1} - \frac{H + h_c}{2} + \frac{H + h_c}{\Pi} \arcsin(t + \sqrt{t^2 - 1}).$$

Suprafața liberă are ecuația :

$$\operatorname{ch} \frac{\Pi X}{a} = -1 + 2a^2 - 4aY + 2Y^2 + 2\sqrt{Y^4 - 4aY^3 + (6a^2 - 1)Y^2 - 2a(2a^2 - 1)Y + a^4 - a^2}$$

și este reprezentată prin curba C_3 din fig. 4.

Curba C_4 reprezintă suprafața liberă pentru cazul clasic. Se observă că suprafața liberă diferă pentru fiecare modificare a frontierelor. (Considerăm că ceilalți coeficienți ai mișcării — H, h — rămâne aceiași

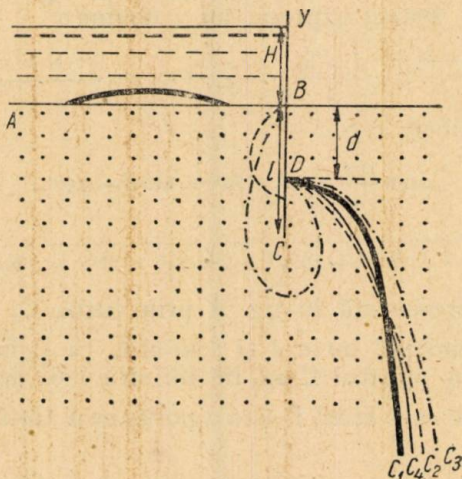


Fig. 4.

în toate cazurile și pentru reprezentare, s-a luat $H + h_c$ ca unitate). Au fost de asemenea reprezentate și arcele Γ_1 (pentru $b = 3, c = 1$); Γ_2 pentru $b = \frac{3}{4}, c = \frac{1}{4}$) și Γ_3 (pentru $b = 0, c = 1$).

§ 4. Să luăm un alt exemplu din mișcarea cu suprafața liberă, și anume filtrația dintr-un canal cu o secțiune oarecare, necunoscută, care prezintă însă simetrie față de verticală. Acest exemplu ilustrează observația făcută la sfârșitul paragrafului 2.

Se consideră că stratul impermeabil se află la adâncime infinită. Acest caz a fost numit de Pavlovski, cazul filtrației libere din canal ([1], pag. 238).

În planul fizic, domeniul mișcării nu se cunoaște. Forma lui se va afla din anumite condiții impuse frontierelor domeniului corespunzător dintr-un alt plan — Jukovski, hodografic, etc. În [1] pag. 238, se presupune că domeniul corespunzător în planul lui Jukovski este un semicerc.

În planul fizic luăm următoarele condiții la limită : $\varphi = 0$ pe suprafața de alimentare, $\psi = -\frac{Q}{2}$ pe AB și $\psi = \frac{Q}{2}$ pe DA (Q este debitul de filtrație din canal). Astfel în planul potențialului complex obținem o semibandă.

Pe suprafața liberă partea reală a funcției Jukovski este constantă, și cum în punctele B și D ea este nulă, înseamnă că suprafața liberă va fi

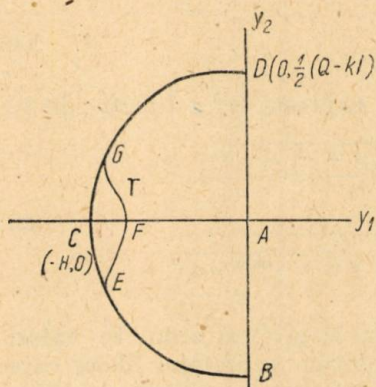


Fig. 5.

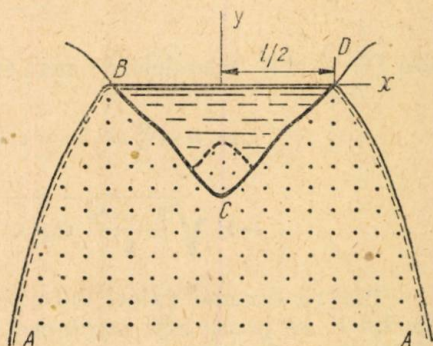


Fig. 6.

reprezentată printr-o porțiune a axei imaginare. Se presupune că imaginea curbei BCD este un semicerc în planul lui Jukovski. De asemenea, presupunând că punctul A corespunde originii, domeniul corespunzător mișcării este interiorul semicercului din fig. 5.

De aici rezultă relația.

$$\frac{1}{2} (Q - kl) = H$$

de unde obținem debitul de filtrație :

$$Q = 2H + kl \quad (11)$$

Acum putem folosi metoda semi-inversă pentru funcția lui Jukovski, Considerăm că domeniul D_j diferă de semicercul D ; astfel pentru D_j vom avea o porțiune de frontieră necunoscută.

Reprezentarea semicercului D pe semiplanul superior al unui plan ajutător t_1 este dată de relația :

$$J = iH(-t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1}) \quad (12)$$

prin care punctele D și B vin respectiv în -1 și 1 .

Imaginea arcului Γ , în acest plan, va fi de o formă oarecare. Fie acesta un semicerc $|t_1| = c$ unde $c < 1$. Trecem acum de la semiplanul $\text{Im}\{t_1\} > 0$ minus semicercul considerat, la semiplanul $\text{Im}\{t\} > 0$, prin transformarea :

$$t_1 = \frac{(1 + c^2)t + \sqrt{(1 + c^2)^2 t^2 - 4c^2}}{2} \quad (13)$$

cu păstrarea punctelor D și B. Avem astfel reprezentarea conformă a domeniului D_j pe semiplanul $\text{Im}\{t\} > 0$.

Reprezentînd pe același semiplan și semibanda din planul potențialului complex prin :

$$f = -i \frac{Q}{\pi} \arcsin t, \quad (14)$$

din (1) și din formulele de mai sus se scoate expresia lui z funcție de t :

$$kz = -\frac{Q}{\pi} \arcsin t + H \frac{(1 + c^2)t + \sqrt{(1 + c^2)^2 t^2 - 4c^2}}{2} - H \sqrt{\frac{(1 + c^2)^2}{2} t^2 - c^2 - 1 + \frac{1 + c^2}{2} t \sqrt{(1 + c^2)^2 t^2 - 4c^2}} \quad (15)$$

Pentru diverse valori date parametrilor k , H și Q și anumite valori ale lui c , se poate afla secțiunea canalului și forma suprafeței libere care răspund condițiilor impuse domeniului D_j . Secțiunea canalului se obține pentru valorile lui t cuprinse între -1 și 1 , iar pentru $t > 1$ și $t < -1$ se obține ramura stîngă, respectiv cea dreaptă a suprafeței libere.

Dacă considerăm cazul $c = \frac{1}{4}$, găsim pentru z expresia :

$$kz = -\frac{Q}{\pi} \arcsin t + H \frac{\frac{17}{16}t + \sqrt{\frac{17^2}{16^2}t^2 - \frac{1}{4}}}{2} - H \sqrt{\frac{17^2 t^2}{2 \cdot 16^2} - \frac{17}{16} + \frac{17^2 t}{2 \cdot 16^2} \sqrt{\frac{17^2 t^2}{16^2} - \frac{1}{4}}} \quad (16)$$

Atît aici cît și în (15) se observă că punctele D și B din planul fizic se obțin pentru $Q = kl + 2H$.

Lărgimea L a curentului la infinit se poate afla ușor din relația (1) în care funcția lui Jukovski este nulă și partea imaginară a lui f este $\frac{Q}{2}$.

Se găsește că $L = Qk^{-1}$.

În figura 6 sînt reprezentate cele două secțiuni ale canalului, precum și suprafețele libere C_1 și C_2 , care răspund la domeniile D și D_j din planul lui Jukovski. Notăm că nu este necesar de a trasa arcul Γ în planul J.

Exemplele date aci credem că evidențiază suficient fecunditatea metodei semi-inverse de rezolvare a unor probleme plane.

BIBLIOGRAFIE

1. V. I. Aravin, S. N. Numerov: *Teoria dvizhenia jidcostei i gazov v nedeformiruemoi poristoi sreda*. Moskva 1953.
2. P. F. Filciacov: *Metod posledovatelinių conformninių otobrajerii i ego prilozhenia s zadaciam filtratii* Ukr. mat. jurnal. 1955. p. 453.
3. Șt. Gheorghită: *A semi-inverse method in plane hydro dynamics: Zahlad mechaniki osrodkow ciaglych*, polskiej akademii nauk. Warszawa 6, 1959.
4. C. Iacob: *Introducere matematică în mecanica fluidelor*, București 1952.
5. N. T. Nuyin, G. T. Tumașev: *Obratnie zadaci*, Kazan 1956.
6. P. I. Polubarinova-Kocina: *Teoria dvizhenia gruntovih vod*, Moskov 1952.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУОБРАТНОГО МЕТОДА К ДВИЖЕНИЯМ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

При помощи полуобратного метода решаются некоторые плоские задачи со свободной поверхностью подземной гидродинамики для областей с частично или полностью неизвестной границей. Поскольку и в плоскости Жуковского, граница имеет неизвестные участки, необходимо использовать вспомогательные плоскости, в которых они будут взяты в подходящей форме. Переходя потом к плоскости t , в которой была изображена также область из плоскости комплексного потенциала, можем решать задачу движения.

Неизвестные участки границы физической плоскости будут образами дуг, взятыми нами произвольно в плоскости t_1 .

Приводятся примеры.

L'APPLICATION D'UNE METHODE SEMI-INVERSE AUX MOUVEMENTS A SURFACE LIBRE DANS LA HYDRODYNAMIQUE SOUTERRAINE

R É S U M É

A l'aide d'une méthode semi-inverse on résout quelques problèmes des mouvements plans à surface libre de la hydrodynamique souterraine pour des domaines dont la frontière est partiellement ou totalement inconnue. Étant donné que dans le plan de Jukovskila frontière aura aussi des portions inconnues, il est nécessaire d'utiliser des plans auxiliaires, où ces portions seront prises d'une forme convenable. En passant ensuite au plan t , où on a représenté aussi le domaine du plan du potentiel complexe, on résout le problème du mouvement. Les portions inconnues de la frontière dans le plan physique seront les images des arcs de courbe, mises arbitrairement par nous dans le plan t_1 . On donne ensuite des exemples.

CONSIDERAREA SUPRAFETELOR DE VİRTEJ ÎN STUDIUL MIȘCĂRILOR rotaționale PERMANENTE TRIDIMENSIONALE ALE FLUIDELOR PERFECTE BAROTROPE*

ION I. CRISTEA

§ 1. Reprezentarea lui Clebsch.

1

Într-o comunicare precedentă [1] am văzut că orice câmp vectorial $\bar{v}$ se poate reprezenta sub forma canonică

$$\bar{v} = \nabla\varphi + \psi\nabla\chi \quad (1)$$

unde, în cazul unui câmp permanent, φ , ψ și χ sînt funcțiuni de x_1, x_2, x_3 , iar operatorul ∇ are semnificație cunoscută**. Reprezentarea (1) se numește *reprezentarea lui Clebsch* [2, 3]. Reprezentarea unui câmp vectorial $\bar{v}$ sub forma canonică (1) nu este unică, ea putîndu-se realiza într-o infinitate de moduri.

În funcție de diferitele relații de dependență diferențială sau funcțională ce există între funcțiunile φ , ψ și χ , reprezentarea canonică (1) a unui câmp vectorial $\bar{v}$ se poate pune mai departe sub una din următoarele forme canonice

$$\begin{aligned} \text{I. } \bar{v} &= \nabla\Phi \\ \text{II. } \bar{v} &= \Psi\nabla X \\ \text{III. } \bar{v} &= \nabla\Phi + \Psi\nabla X \end{aligned} \quad (1')$$

și numai sub una din aceste trei forme canonice. Astfel, în spațiul euclidian cu trei dimensiuni avem trei tipuri canonice distincte de câmpuri vectoriale $\bar{v}$, tipul unui câmp vectorial fiind caracterizat în mod unic de una din reprezentările canonice (1') și numai de o singură reprezentare canonică (1').

* Această lucrare a fost prezentată la Sesiunea Cadrelor didactice din Facultatea de Matematică și Fizică a Universității din București din 21—23 mai 1961.

** În lucrare, acolo unde nu pot apărea confuzii, nu vom mai insista asupra notațiilor; notațiile de cele mai multe ori fiind cele consacrate.

Ne vom rezuma la începutul lucrării doar la reprezentarea (1) a lui Clebsch.

În general,

$$\text{rot } \bar{v} = \nabla \psi \times \nabla \chi \quad (2)$$

astfel că în cazul tipurilor canonice II și III, adică în cazul câmpurilor rotaționale, între funcțiile ψ și χ nu poate exista o relație de dependență diferențială de forma $d\psi = \alpha d\chi$ cu α funcție de x_1, x_2, x_3 . Cu atât mai mult în aceste cazuri nu poate exista o relație de dependență funcțională de forma $f(\psi, \chi) = 0$. În aceste cazuri canonice funcțiunile

$$\psi = \psi(x_1, x_2, x_3) \text{ și } \chi = \chi(x_1, x_2, x_3)$$

ce apar în (1) se numesc *funcțiuni de vîrtej*, deoarece în baza reprezentării (2) a câmpului $\text{rot } \bar{v}$ suprafețele

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \text{const. și } \chi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.} \quad (3)$$

sînt niște suprafețe de vîrtej distincte a căror intersecție definesc familia liniilor de vîrtej ale câmpului.

În prezenta notă ne vom ocupa de studiul mișcărilor rotaționale, permanente și tridimensionale ale fluidelor perfecte barotrope, adică de mișcările fluide pentru care câmpul vitezelor $\bar{v}$ ale particolelor fluide este un câmp de tipul canonic II sau III. În special, vom dezvolta cazul cînd câmpul de viteze $\bar{v}$ este un câmp de tipul canonic II punînd în acest caz în evidență un tip de mișcări înrudite cu mișcarea plană.

Se știe [1] că o condiție necesară și suficientă pentru ca un câmp vectorial $\bar{v}$ să fie de tipul canonic II este ca

$$\text{rot } \bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \quad (4)$$

condiție care în cazul mișcărilor fluide revine la ortogonalitatea liniilor de vîrtej ale mișcării pe liniile de curent.

§ 2. Coordonate curbilinii naturale

Să reluăm reprezentarea canonică (1) a lui Clebsch

$$\bar{v} = \nabla \varphi + \psi \cdot \nabla \chi \quad (1)$$

și să presupunem că această reprezentare nu se poate reduce la forma canonică I, adică sîntem în cazul unui câmp vectorial rotațional. Vom admite că $\bar{v}$ va reprezenta câmpul vitezelor particolelor fluide în mișcare permanentă tridimensională ale unui fluid perfect barotrop.

Considerînd familiile uniparametrice de suprafețe de vîrtej generate de suprafețele de vîrtej (3) vom pune

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = q^1 \text{ și } \chi(x_1, x_2, x_3) = q^2 \quad (5)$$

q^1 și q^2 apărînd astfel ca parametrii celor două familii.

Fie acum $\lambda = \lambda(x_1, x_2, x_3)$ o funcțiune de x_1, x_2, x_3 avînd proprietatea că

$$\Delta = \frac{\partial(\psi, \chi, \lambda)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0. \quad (6)$$

Punînd atunci și

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = q^3, \quad (5')$$

relațiile (5) și (5'), pe baza condiției (6), definesc un sistem de coordonate curbilinii q^1, q^2, q^3 în spațiul cu trei dimensiuni. Relațiile (5)–(5') sînt relațiile de trecere de la coordonatele carteziene x_1, x_2, x_3 la coordonatele curbilinii q^1, q^2, q^3 . Conform condiției (6) relațiile (5)–(5') local se pot inversa și vom obține

$$x_i = x_i(q^1, q^2, q^3), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

avînd astfel și formulele de trecere de la coordonatele curbilinii q^1, q^2, q^3 la coordonatele carteziene x_1, x_2, x_3 .

Sistemul de coordonate curbilinii q^1, q^2, q^3 definit prin relațiile (5)–(5') îl vom numi *sistem de coordonate curbilinii naturale*. Funcțiunea λ în (5') fiind suficient de arbitrară, se pot defini o infinitate de astfel de sisteme de coordonate curbilinii naturale.

Conform cu (7), vectorul de poziție $\vec{r}$ al unui punct oarecare al spațiului va fi funcție de q^1, q^2, q^3 , astfel ca baza sistemului de coordonate curbilinii naturale considerat va fi formată din vectorii :

$$\bar{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Componentele covariante ale tensorului metric în raport cu sistemul de coordonate considerat vor fi

$$g_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \frac{\partial x_k}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q^j}, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

indicele k fiind indice de sumare. Avem relațiile :

$$g = \det(g_{ij}) = \frac{1}{\Delta^2} > 0,$$

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = \sqrt{g} = \frac{1}{\Delta}$$

Vom nota cu $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ vectorii bazei reciproce bazei (8). Vectorii $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ vor fi legați de vectorii $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ prin relațiile :

$$\bar{e}^i = \frac{\bar{e}_j \times \bar{e}_k}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}, \quad \bar{e}_i = \frac{\bar{e}^j \times \bar{e}^k}{(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3)}$$

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \cdot (\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3) = 1$$

ordinea indicilor i, j, k fiind aceea a unei permutări pare a indicilor 1, 2, 3.

Pe baza vectorilor reciproci $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ se definesc componentele contravariante ale tensorului metric în raport cu coordonatele naturale q^1, q^2, q^3 :

$$g^{ij} = \bar{e}^i \cdot \bar{e}^j = \frac{\partial q^i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial q^j}{\partial x_k}, \quad (i, j, = 1, 2, 3)$$

Vizibil

$$\nabla q^i = \bar{e}^i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

Să notăm cu φ^* funcția ce se obține compunând funcția φ cu funcțiile (7):

$$\varphi^* = \varphi^*(q^1, q^2, q^3) = \varphi(x_1(q^1, q^2, q^3), x_2(q^1, q^2, q^3), x_3(q^1, q^2, q^3))$$

În baza reprezentării (1) a lui Clebsch, vectorul $\bar{v}$ se transcrie

$$\bar{v} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial q^1} \cdot \bar{e}^1 + q^1 \bar{e}^2$$

de unde urmează că componentele covariante v_1, v_2, v_3 ale vectorului $\bar{v}$ în raport cu coordonatele curbilinii q^1, q^2, q^3 sînt

$$v_1 = \frac{\partial \varphi^*}{\partial q^1}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi^*}{\partial q^2} + q^1, \quad v_3 = \frac{\partial \varphi^*}{\partial q^3} \quad (9)$$

Apoi, în baza reprezentării (2) a vectorului $\text{rot } \bar{v}$, avem

$$\text{rot } \bar{v} = \bar{e}^1 \times \bar{e}^2 = (\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3) \bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \bar{e}_3$$

astfel că componentele contravariante ξ^1, ξ^2, ξ^3 ale vectorului $\bar{\xi} = \text{rot } \bar{v}$ față de baza (8) sînt

$$\xi^1 = 0, \quad \xi^2 = 0, \quad \xi^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \quad (10)$$

§ 4. Ecuațiile generale ale mișcării în coordonate naturale

La baza studiului mișcărilor permanente ale fluidelor perfecte barotrope stau:

— ecuațiile lui Euler

$$\text{rot } \bar{v} \times \bar{v} = \nabla B, \quad B = U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} V^2, \quad (11)$$

— ecuația de continuitate

$$\text{div}(\rho \bar{v}) = 0, \quad (12)$$

— ecuația de stare

$$p = p(\rho). \quad (13)$$

Condiția la limită cea mai frecventă ce se impune cîmpului de viteze este ca viteza $\bar{v}$ a particulelor fluide în contact cu o suprafață (S) prin care nu avem transfer de fluid, să fie tangentă la suprafața respectivă. În limbajul adoptat în [4] această condiție revine la faptul că suprafața (S) este o *suprafață de curent*.

Să vedem cum se transformă ecuațiile (11), (12), (13) cînd trecem de la coordonatele carteziene x_1, x_2, x_3 la coordonatele curbilinii naturale q^1, q^2, q^3 .

Să notăm cu v^1, v^2, v^3 componentele contravariante ale vectorului $\bar{v}$ față de coordonatele naturale q^1, q^2, q^3 .

Componentele covariante ale vectorului $\text{rot } \bar{v} \times \bar{v}$ față de același sistem de coordonate naturale se definesc conform relațiilor

$$(\text{rot } \bar{v} \times \bar{v})_i = \sqrt{g} (\xi^j v^k - \xi^k v^j)$$

ordinea indicilor i, j, k fiind cea precizată mai înainte. În baza expresiilor (10) ale componentelor contravariante ale vectorului $\bar{\xi} = \text{rot } \bar{v}$, aceste componente covariante ale vectorului $\text{rot } \bar{v} \times \bar{v}$ vor avea expresiile:

$$(\text{rot } \bar{v} \times \bar{v})_1 = -v^2, \quad (\text{rot } \bar{v} \times \bar{v})_2 = v^1, \quad (\text{rot } \bar{v} \times \bar{v})_3 = 0$$

Componentele covariante ale vectorului ∇B vor fi apoi

$$(\nabla B)_1 = \frac{\partial B}{\partial q^1}, \quad (\nabla B)_2 = \frac{\partial B}{\partial q^2}, \quad (\nabla B)_3 = \frac{\partial B}{\partial q^3}$$

În baza ecuației de mișcare (11) egalînd atunci, componentele covariante ale vectorului $\text{rot } \bar{v} \times \bar{v}$ față de coordonatele naturale q^1, q^2, q^3 cu componentele covariante ale vectorului ∇B față de aceleași coordonate, vom obține ecuațiile

$$\frac{\partial B}{\partial q^1} = -v^2, \quad \frac{\partial B}{\partial q^2} = v^1, \quad \frac{\partial B}{\partial q^3} = 0. \quad (14)$$

Din ultima din aceste ecuații rezultă că funcția B a lui Bernoulli nu depinde de q^3 , adică

$$B = B(q^1, q^2) \quad (15)$$

de unde urmează că suprafețele Bernoulli-Vâlcovici [5, 6]

$$B = \text{const.} \quad (16)$$

sînt niște suprafețe de vîrtej.

Considerînd apoi ecuațiile diferențiale ale congruenței liniilor de curent ale mișcării

$$\frac{\delta q^1}{v^1} = \frac{\delta q^2}{v^2} = \frac{\delta q^3}{v^3}$$

din ecuațiile (14) rezultă că pe o linie de curent avem $\delta B = 0$, ceea ce înseamnă că suprafețele (16) sînt și suprafețe de curent.

Aceste ultime concluzii despre suprafețele (16) ale lui Bernoulli-Vâlcovici sînt cunoscute și se pot trage de altfel direct din ecuația de mișcare (11).

Cum am găsit că funcția B nu depinde decît de variabilele curbilinii q^1 și q^2 , din primele două din ecuațiile de mișcare (14) rezultă că și componentele contravariante v^1 și v^2 ale vitezei $\bar{v}$ nu depind de q^3 :

$$v^1 = v^1(q^1, q^2), \quad v^2 = v^2(q^1, q^2). \quad (17)$$

Fie acum

$$C(q^1, q^2, q^3) = \text{const.} \quad (18)$$

o altă suprafață de curent distinctă de suprafețele (16) ale lui Bernoulli-Vâlcovici.

Am văzut [4, 7, 8] că în cazul permanent ecuația de continuitate (12) se poate satisface admitînd pentru cîmpul $\rho\bar{v}$ al impulsului specific o reprezentare de forma

$$\rho\bar{v} = f \cdot \nabla B \times \nabla C \quad (19)$$

unde $f = f(B, C)$ este o funcție arbitrară de B și C . Această reprezentare (19) va conduce pentru componentele contravariante ale vectorului $\bar{v}$ la următoarele relații

$$\rho v^i = f \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(B, C)}{\partial(q^j q^k)} \quad (19')$$

care în virtutea ecuațiilor de mișcare (14) se transcriu sub forma

$$\begin{aligned} \rho v^1 &= f \frac{1}{\sqrt{g}} v^1 \frac{\partial C}{\partial q^3}, & \rho v^2 &= f \frac{1}{\sqrt{g}} v^2 \frac{\partial C}{\partial q^3} \\ \rho v^3 &= -f \frac{1}{\sqrt{g}} \left(v^1 \frac{\partial C}{\partial q^1} + v^2 \frac{\partial C}{\partial q^2} \right). \end{aligned} \quad (19'')$$

Cum din (19') avem că

$$v^i \cdot \frac{\partial C}{\partial q^i} = 0 \quad (20)$$

și cum nu putem avea toate componentele v^1, v^2, v^3 nule, din (19'') rezultă că

$$\rho\sqrt{g} = f(B, C) \frac{\partial C}{\partial q^3}. \quad (21)$$

Funcțiunea λ ce definește coordonata curbilinie q^3 a fost aleasă arbitrară. Dacă în (5') luăm ca funcție λ chiar funcțiunea

$$\gamma = \gamma(x_1, x_2, x_3) = C(q^1(x_1, x_2, x_3), q^2(x_1, x_2, x_3), q^3(x_1, x_2, x_3))$$

adică presupunem că

$$C(q^1, q^2, q^3) \equiv q^3, \quad (22)$$

ultima ecuație (19'') atrage că

$$v^3 = 0, \quad (23)$$

iar primele două ecuații (19''), cum nu putem avea simultan $v^1 = 0$ și $v^2 = 0$, vor conduce analog la ecuația

$$\rho \sqrt{g} = f(B, q^3). \quad (24)$$

Această ultima ecuație, în coordonate carteziene va da pentru densitatea ρ expresia

$$\rho = f(B, \gamma) \frac{\partial(\psi, \chi, \gamma)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \quad (24')$$

În concluzie, față de sistemul de coordonate curbilinii naturale definit de ecuațiile (5)–(5') ecuațiile (11) și (12) s-au redus la ecuațiile (14), (20) și (21). Dacă sistemul de coordonate curbilinii ar fi fost definit de ecuațiile (5) și

$$\gamma = (x_1, x_2, x_3) = q^3 \quad (22')$$

ecuațiile (11) și (12) s-ar fi redus la ecuațiile (14), (23) și (24). În ambele aceste cazuri componentele contravariante v^1 și v^2 sînt funcțiuni doar de q^1 și q^2 .

Eliminînd funcția B între primele două ecuații (14) pentru componentele contravariante v^1 și v^2 obținem ecuația

$$\frac{\partial v^1}{\partial q^1} + \frac{\partial v^2}{\partial q^2} = 0 \quad (25)$$

ecuație care se aseamănă perfect cu ecuația de continuitate din cazul mișcării plane a unui fluid incompresibil.

Eliminînd apoi, funcția φ^* între primele două ecuații (9) se obține și ecuația

$$\frac{\partial v_2}{\partial q^1} - \frac{\partial v_1}{\partial q^2} = 1 \quad (26)$$

între componentele covariante v_1 și v_2 .

Ținînd cont că între componentele covariante și componentele contravariante ale vectorului $\bar{v}$ avem relațiile

$$v_i = g_{ij} v^j, \quad (i = 1, 2, 3)$$

ultima ecuație se transcrie

$$\frac{\partial}{\partial q^1} (g_{2j} v^j) - \frac{\partial}{\partial q^2} (g_{1j} v^j) = 1. \quad (26')$$

Această ecuație în cazul cînd sistemul de coordonate curbilinii naturale q^1, q^2, q^3 este definit de ecuațiile (5) și (22') în baza ecuației (23) se reduce la

$$\frac{\partial}{\partial q^1} (g_{21} v^1 + g_{22} v^2) - \frac{\partial}{\partial q^2} (g_{11} v^1 + g_{12} v^2) = 1 \quad (26'')$$

ecuație în care intervin doar componentele contravariante v^1 și v^2 .

Amintim că în baza faptului că suprafața (S) în contact cu care este fluidul fiind o suprafață de curent, funcțiile B și C trebuie astfel alese sau determinate încît ecuația suprafeței (S) să se poată pune sub forma

$$F(B, C) = 0 \quad (27)$$

§ 4. Un tip de mișcări fluide înrudite cu mișcarea plană

Să presupunem că pe lângă ecuațiile (11), (12) și (13) avem și ecuația (4) de ortogonalitate a câmpurilor rot $\bar{v}$ și $\bar{v}$. Am anunțat mai înainte că ecuația (4) este condiția necesară și suficientă pentru ca câmpul vitezelor $\bar{v}$ să fie de tipul canonic II.

Ecuația (4) în raport cu sistemul de coordonate definit în (5) și (5') se transcrie

$$\xi^1 v_1 + \xi^2 v_2 + \xi^3 v_3 = 0 \quad (4')$$

astfel că în baza expresiilor (10) ale componentelor ξ^1, ξ^2, ξ^3 rezultă că

$$v_3 = 0, \quad (28)$$

Ținînd cont că componentele covariante v_1, v_2, v_3 sînt caracterizate în (9), această ultimă condiție atrage că funcțiunea φ^* este o funcție doar de q^1 și q^2 :

$$\varphi^* = \varphi^*(q^1, q^2)$$

ceea ce este normal dacă ținem cont că câmpul vitezelor $\bar{v}$ este de tipul canonic II.

Din relațiile (9) pe baza ultimei concluzii rezultă că componentele covariante v_1 și v_2 ale vitezei vor fi de asemenea funcțiuni doar de q^1 și q^2 :

$$v_1 = v_1(q^1, q^2) \quad \text{și} \quad v_2 = v_2(q^1, q^2). \quad (29)$$

Modulul vitezei fiind dat de relația

$$V^2 = v_2 v^1 + v_2 v^2$$

în virtutea expresiilor (17) și (29), urmează că și V nu depinde de variabila curbilinie q^3 :

$$V = V(q^1, q^2) \quad (30)$$

Ținînd cont apoi de expresia funcțiunii B și de ecuația de stare (13):

$$B = U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} V^2, \quad p = p(\rho) \quad (31)$$

se observă că condiția necesară și suficientă ca densitatea ρ și presiunea p a fluidului să nu depindă de variabila q^3 :

$$\rho = \rho(q^1, q^2), \quad p = p(q^1, q^2) \quad (32)$$

este ca funcțiunea de forță U de asemenea să nu depindă de variabila curbilinie q^3 :

$$U = U(q^1, q^2) \quad (33)$$

Să considerăm acum sistemul de coordonate curbilinii naturale q^1, q^2, q^3 în care coordonata q^3 este precizată de ecuația (22'), adică familia de suprafețe

$$q^3 = \text{const.} \quad (22'')$$

este o familie de suprafețe de curent.

În acest caz, pe lângă ecuația (28) avînd și ecuația (23), putem scrie

$$g_{31}v^1 + g_{32}v^2 = 0 \quad (34)$$

Ori componentele contravariante ale vectorului $\bar{v}$ în raport cu coordonatele q^1, q^2, q^3 se definesc prin ecuațiile

$$v^i = \frac{dq^i}{dt}, \quad (i = 2, 2, 3)$$

Cum apoi $\rho \neq 0$, din (24') rezultînd că

$$\Delta^* \frac{\partial(\psi, \chi, \gamma)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0,$$

între deplasările infinitezimale dq^1, dq^2, dq^3 nu putem avea o relație de forma

$$h_i(q^1, q^2, q^3)dq^i = 0$$

cu cel puțin una dintre funcțiile h_1, h_2, h_3 neidentic nulă. Cu alte cuvinte deplasările elementare dq^1, dq^2, dq^3 sînt linear independente. Aceasta atrage că și componentele v^1, v^2, v^3 sînt linear independente. Din ecuația (34) vor rezulta atunci neapărat ecuațiile :

$$g_{13} = g_{31} = 0 \quad \text{și} \quad g_{23} = g_{32} = 0 \quad (35)$$

Aceste ultime ecuații spun că sistemul de coordonate curbilinii q^1, q^2, q^3 caracterizat de ecuațiile (5) și (22') este un sistem de coordonate *biortogonal*.

În virtutea acestor concluzii (35) și pe baza expresiilor (10) ale componentelor contravariante ale turbionului $\bar{\xi} = \text{rot } \bar{v}$, pentru componentele covariante ale sale avem evident

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \quad (36)$$

Din relațiile

$$v_1 = g_{11}v^1 + g_{12}v^2, \quad v_2 = g_{21}v^1 + g_{22}v^2 \quad (37)$$

cum componentele v_1, v_2 și v^1, v^2 ale lui $\bar{v}$ nu depind decît de q^1 și q^2 , urmează că este suficient ca cel puțin una din componentele g_{11}, g_{12}, g_{22} ale tensorului metric să nu depindă de q^3 pentru ca și celelalte două componente să nu depindă de q^3 .

Să admitem că funcțiunea de forță U se bucură de proprietatea (33). Această ipoteză suplimentară se va adăuga ipotezei (4) ce precizează tipul canonic al mișcării fluide. Se observă că cu aceste ipoteze față de coordonatele curbilinii q^1, q^2, q^3 definite în (5) și (22'), toate elementele mișcării cu excepția componentelor ξ^3 și ξ_3 ale turbionului $\bar{\xi} = \text{rot } \bar{v}$ nu depind decît de variabilele curbilinii q^1 și q^2 .

Pentru ca ξ^3 să nu depindă de q^3 , în baza lui (10) este necesar și suficient ca $\sqrt{g}$ să nu depindă de q^3 . Ori pentru ca $\sqrt{g}$ să nu depindă de q^3 , conform ipotezei (33) avînd pentru ρ expresia (32), din ecuația (24) urmează că este suficient ca funcția $f = f(B, q^3)$ să nu depindă de q^3 . Cum pentru B avem expresia (15), înseamnă că funcția f va trebui să fie de forma $f = f(B)$. Ecuația (24) se va înlocui cu ecuația

$$\rho \sqrt{g} = f(B) \quad (38)$$

și vom putea scrie că

$$g = g(q^1, q^2) \quad \text{și} \quad \xi^3 = \xi^3(q^1, q^2). \quad (39)$$

Deocamdată pe baza ipotezelor (4) și (33) și din felul cum au fost definite coordonatele curbilinii q^1, q^2, q^3 nu rezultă dacă componenta covariantă ξ_3 a turbionului depinde sau nu de q^3 .

Să presupunem că și ξ_3 nu depinde de q^3 , adică

$$\xi_3 = \xi_3(q^1, q^2). \quad (40)$$

Din (36), conform cu (39), urmează că g_{33} nu depinde decît de q^1 și q^2 :

$$g_{33} = g_{33}(q^1, q^2). \quad (41)$$

În baza ecuațiilor (35) avînd

$$g = G \cdot g_{33}, \quad G = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 > 0$$

rezultă că și minorul G este o funcție doar de q^1 și q^2 :

$$G = G(q^1, q^2). \quad (42)$$

Asociind această ecuație (42) la ecuațiile (36) tragem concluzia că toate componentele g_{ij} , ($i, j = 1, 2$) nu depind decît de variabilele curbilinii q^1 și q^2 :

$$g_{ij} = g_{ij}(q^1, q^2), \quad (i, j = 1, 2) \quad (43)$$

În felul acesta toate componentele covariante ale tensorului metric în raport cu variabilele curbilinii naturale q^1, q^2, q^3 depind doar de q^1 și q^2 .

Ipotezele (4), (33) și (40) permit ca, din punctul de vedere al coordonatelor curbilinii q^1, q^2, q^3 definite în (5) și (22'), să tragem concluzia că pe fiecare suprafață de curenți (22'') mișcarea se petrece la fel, iar de-a lungul fiecărei linii de vîrtej ($q^1 = \text{const.}$ și $q^2 = \text{const.}$) caracteristicile mecanice și geometrice ale mișcării să fie invariante.

Ca ipotezele (4), (33) și (40) să aibă sens este necesar însă ca față de aceleași coordonate curbilinii definite în (5) și (22'), în ecuația (27) a suprafeței frontieră (S) în contact cu care este fluidul, variabila q^3 să nu mai apară. Aceasta înseamnă că funcția B trebuie astfel determinată ca ecuația suprafeței (S) să se poată pune sub forma $F(B) = 0$. Cu alte cuvinte pe suprafața (S) trebuie să avem

$$B = \text{const.} \quad (44)$$

condiție pe care se citește că suprafețele frontieră (S) în contact cu care este fluidul și prin care nu există transfer de fluid sînt niște suprafețe Bernoulli-Vălcovici.

Dacă fluidul are particole situate la infinit, pentru asigurarea independenței elementelor mecanice ale mișcării de variabila q^3 este necesar ca și condițiile de la infinit ce se impun fluidului să nu depindă de variabila curbilinie q^3 .

Concluzii calitativ aceleași au fost obținute de noi [7, 8] pornind de la considerarea în special a suprafețelor de curent ale mișcării, adică considerînd pentru cîmpul $\rho\vec{v}$ al impulsului specific o reprezentare de forma (19).

Mișcările puse în evidență în acest paragraf sînt niște mișcări ce generalizează mișcarea plană în mod natural. În cazul mișcării fluide plane, de exemplu paralele la planul xOy , pe fiecare plan $z = \text{const.}$ mișcarea avea aceeași alură, iar pe fiecare paralelă la axa Oz , adică pentru $x = \text{const.}$ și $y = \text{const.}$, elementele mecanice ale mișcării erau aceleași. Evident, de o proprietate analogă se bucură și mișcările fluide considerate în acest paragraf. Apoi, în cazul mișcărilor plane, planele $z = \text{const.}$ erau niște suprafețe de curent, iar paralele la Oz (trajectoriile ortogonale la planele $z = \text{const.}$) erau linii de vîrtej. În cazul mișcărilor considerate de noi, suprafețele $q^3 = \text{const.}$ sînt de asemenea niște suprafețe de curent, iar trajectoriile ortogonale la aceste suprafețe în baza condițiilor (34) sînt liniile de vîrtej: $q^1 = \text{const.}$ și $q^2 = \text{const.}$ În fine, suprafețele fluide cu care era în contact fluidul în cazul mișcării plane fiind niște cilindri cu generatoarele paralele la axa Oz erau și suprafețe de curent și suprafețe de vîrtej, adică erau niște suprafețe Bernoulli-Vălcovici. O aceeași proprietate conform cu ecuația (43) o au și suprafețele impermeabile ce limitează fluidul în cazul nostru. Dacă fluidul are particole situate la infinit condițiile din cazul mișcării plane se transpun analog și în cazul mișcării studiate în acest paragraf.

Aceste mișcări cu caracter bidimensional ce se înrudesesc cu cazul mișcării plane sînt niște mișcări foarte particulare. Ele formează totuși o clasă de mișcări care este mai vastă decît clasa mișcărilor plane.

Se observă că sistemul de coordonate curbilinii naturale q^1, q^2, q^3 definit de (5) și (22'), în cazul mișcărilor fluide considerate de noi în acest paragraf, este supus doar la condițiile (35), (41) și (43), condiții în care variabila q^3 nu apare. Forma particulară a acestor condiții precum și forma particulară a ecuațiilor și condițiilor la limită ce caracterizează mișcarea fluidului permit considerarea unei metode „semiinverse” pentru obținerea de mișcări fluide cu caracterul celor considerate în acest paragraf. Astfel, se poate presupune că sistemul de coordonate curbilinii q^1, q^2, q^3 este cunoscut sau se poate obține prin considerații parțiale, fizice și geometrice, efectuate asupra problemei în studiu. Sistemul de coordonate curbilinii q^1, q^2, q^3 trebuie să fie astfel dat sau astfel ales încît să fie satisfăcute condițiile (35), (41), (43). Cunoașterea sistemului de coordonate curbilinii q^1, q^2, q^3 așa fel ca să fie satisfăcute condițiile de compatibilitate (35), (41), (43) duce la cunoașterea componentelor g_{ij} , ($i, j = 1, 2$) și g_{33} ale tensorului metric ca funcțiuni de q^1 și q^2 și permite a determina apoi și caracteristicile mecanice ale mișcării respective.

Astfel, în baza condițiilor (17) sistemul de ecuații au derivate parțiale (25) și (26'') :

$$\frac{\partial v^1}{\partial q^1} + \frac{\partial v^2}{\partial q^2} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial q^1} (g_{21}v^1 + g_{22}v^2) - \frac{\partial}{\partial q^2} (g_{11}v^1 + g_{12}v^2) = 1 \quad (26'')$$

este un sistem în care apar doar variabilele curbilinii q^1 și q^2 . Acest sistem va determina componentele contravariante v^1 și v^2 ale vitezei $\bar{v}$ în raport cu coordonatele curbilinii considerate. Pe baza ecuațiilor (37) se calculează și componentele covariante v_1 și v_2 ale vitezei $\bar{v}$ iar mai departe modulul V al vitezei $\bar{v}$.

Ținând cont de ecuațiile de mișcare (14), funcțiunea B se va obține evaluând următoarea integrală curbilinie

$$B = \int_{\Gamma} v^1 dq^2 - v^2 dq^1 \quad (45)$$

Această integrală curbilinie în baza ecuației (25) nu va depinde de drumul Γ ce unește un punct P_0 al fluidului, în care funcția B se poate da, cu un punct curent P . Altfel spus, funcția B este unic determinată abstracție de o constantă aditivă, fapt care fizic n-are nicio consecință.

Acum, cum funcțiunile U , V și B în ecuațiile (31) ca funcțiuni de q^1 și q^2 se cunosc, din aceste ecuații se determină densitatea ρ și presiunea p ca funcțiuni de q^1 și q^2 .

Cum ρ se determină, din ecuația (38) se poate determina eventual funcțiunea $f = f(B)$.

Pentru a obține mișcări în jurul unor obstacole, analog ca la mișcarea plană se poate aplica cunoscuta metodă a „solidificării“. Anume, se consideră suprafețele

$$B = \text{const.}$$

și se presupune că fluidul alunecă în jurul uneia din aceste suprafețe.

Deci, alegînd diverse sisteme de coordonate curbilinii q^1 , q^2 , q^3 care să corespundă condițiilor (35), (41) și (43) se pot obține mișcări fluide destul de interesante. Vom justifica această afirmație într-o lucrare viitoare.

BIBLIOGRAFIE

1. Cristea I. Ion: *Mecanica analitică a fluidelor perfecte barotrope*, „Studia Universitatis Babeș-Bolyai“, Cluj, Series Math-Phys., 1963, fasc. 2, pag. 81–94.
2. Clebsch A.: *Über eine allgemeine Transformation d. hydrodynamischen Gleichungen*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik“, Berlin, 1857, pag. 293–312.
3. Lamb H.: *Hydrodynamics* (Clebsch's Transformation), Cambridge, ed. a VI-a, 1932, pag. 248–249.
4. Cristea I. Ion: *Asupra ecuației de continuitate a mișcărilor fluide*. „Comunicările Academiei R.P.R.“, București, tom. XI, nr. 12, 1961, pag. 1443–1450.
5. Vâlcovici V. V.: *Sur le mouvement des fluides barotropes*, „Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei“, seria VIII, vol. XXI, fasc. 5, 1956, pag. 288–296.

6. Vâlcovici V. V.: *Suprafețele Bernoulli*, „Studii și cercetări de Mecanică aplicată”, București, anul XI, nr. 6, 1960, pag. 1507—1533.
7. Cristea I. Ion: *Equations intrinsecues d'un mouvement fluide permanent*, Comptes Rendus, Paris, vol. 253, nr. 25, 1961, pag. 2843.
8. Cristea I. Ion: *Asupra mișcărilor tridimensionale permanente ale fluidelor barotrope*, „Studii și cercetări Matematice”, București, vol. XIII, nr. 1, 1962, pag. 155—171.

РАССМОТРЕНИЕ ВИХРЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТРЁХМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ БАРОТРОПИЧЕСКИХ СОВЕРШЕННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Начиная с изображения (1) Клебша и рассматривая систему криволинейных „натуральных” координат, заданную (5) — (5'), получают уравнения (14), (21), которые характеризуют движение баротропической совершенной жидкости.

Уточняя криволинейную координату q^3 согласно с (22) — (22'), уравнение (21) обращается в уравнение (24).

В случае канонического типа (II) жидких движений (гипотеза 4) и во второстепенных гипотезах (33 и 40) получается вид жидких движений, родственных с плоским движением: на каждой поверхности течения $q^3 = \text{const}$, движение происходит одинаково, а вдоль каждой вихревой линии $q^1 = \text{const}$, $q^2 = \text{const}$, механические и геометрические характеристики движения инвариантны.

Для того, чтобы гипотезы (4), (33), (40) имели бы смысл, необходимо, чтобы граничные поверхности (S), которые находятся в соприкосновении с жидкостью, и через которые не существует перехода жидкости, были бы поверхности Бернулли — Вылкович.

Система криволинейных координат q^1 , q^2 , q^3 , заданная (5) и (22') подчинена в этом случае лишь условиям (35), (41), (43), условия в которых переменная q^3 не фигурирует.

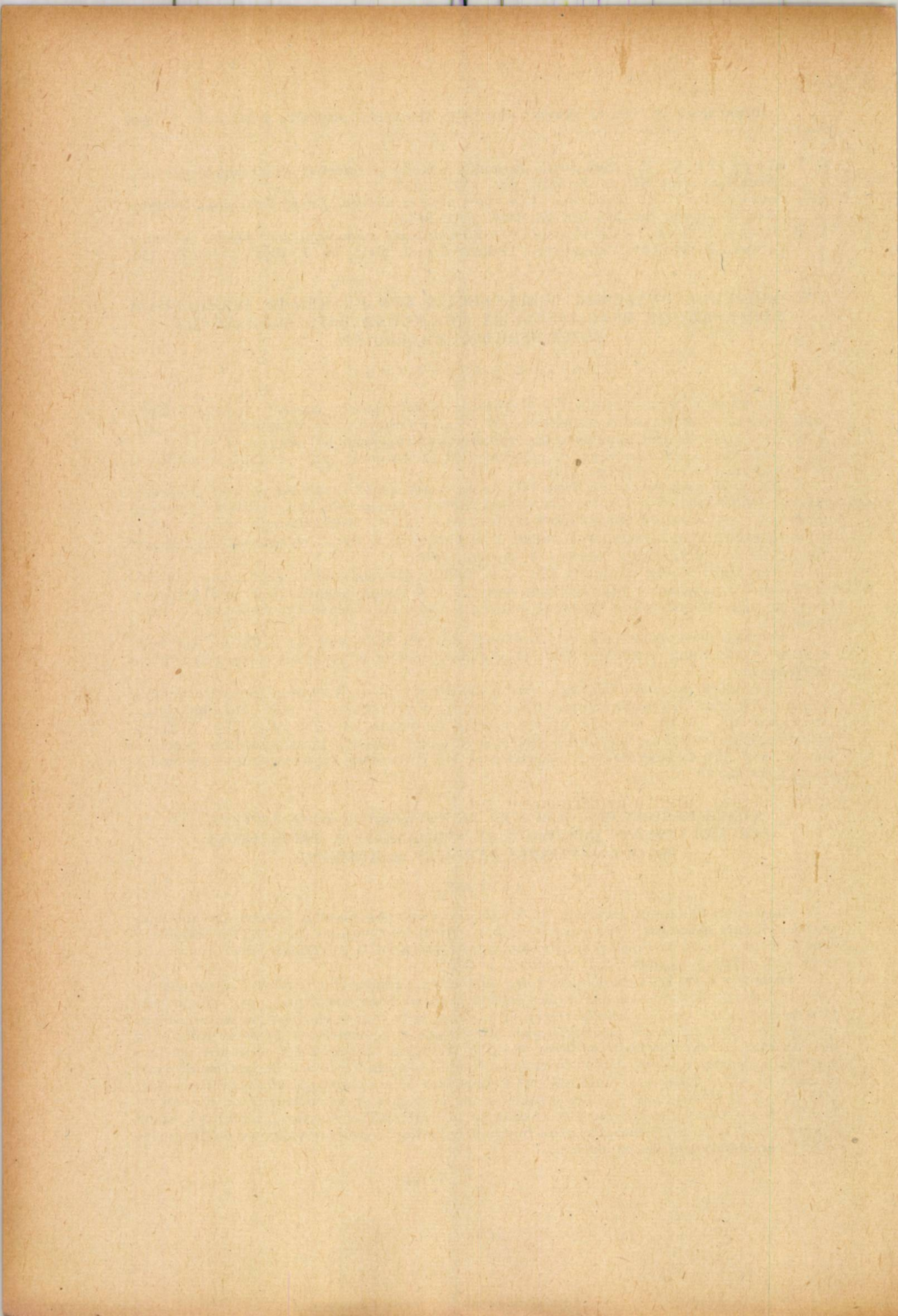
Предлагается „полуобратный” метод изучения задачи. А именно, геометрическими или физическими доказательствами автор пытается установить систему криволинейных координат q^1 , q^2 , q^3 , которая удовлетворяла бы условиям (35), (41), (43), а потом решается система уравнений (25) и (26''), в которых имеются криволинейные переменные q^1 и q^2 ; эта система будучи разрешённой все остальные характеристики движения выводятся легко.

CONSIDÉRATION DES SURFACES DE TOURBILLON DANS L'ÉTUDE DES MOUVEMENTS ROTATIONNELS PERMANENTS À TROIS DIMENSIONS DES FLUIDES PARFAITS BAROTROPES

RÉSUMÉ

En partant de la représentation (1) de Clebsch et en considérant le système des coordonnées curvilignes naturelles défini par (5) — (5') on obtient les équations (14), (21) qui caractérisent le mouvement d'un fluide parfait barotrope. En précisant la coordonnée q^3 en conformité avec (22) — (22') l'équation (21) se réduit à (24).

Dans le cas du type canonique II des mouvements fluides (l'hypothèse (4)) on obtient avec (33) et (40) des mouvements fluides dans le genre du mouvement plan: sur chaque surface de courant $q^3 = \text{const}$. le mouvement est le même, et le long de chaque ligne de tourbillon $q^1 = \text{const}$, $q^2 = \text{const}$. les caractéristiques mécaniques et géométriques du mouvement sont des invariants. Pour que les hypothèses (4), (33), (40) aient un sens il est nécessaire que les surfaces — frontière (S) du fluide soient des surfaces Bernoulli-Vâlcovici. Le système de coordonnées q^1 , q^2 , q^3 défini par (5) est, (22') est soumis dans ce cas seulement aux conditions (35), (41), (43) d'où q^3 disparaît. Par des considérations physiques ou géométriques on cherche de trouver le système qui satisfasse aux conditions (35), (41), (43) et ensuite on résout le système d'équations (25) et (26'') dans lesquelles figurent seules les variables q^1 et q^2 ; on en déduit les autres caractéristiques du mouvement.



FIZICĂ

EMISIUNEA TERMOIONICĂ A SULFURII DE NICHEL (NiS)* ÎN FUNCȚIE DE TEMPERATURĂ, PRESIUNE ȘI POTENȚIAL ACCELERATOR

TRAIAN GHEORGHIU, A. NICOLAU, N. RĂDULESCU, E. POPESCU

Metalele cît și sărurile neorganice, în anumite condițiuni de încălzire, emit particule încărcate cu electricitate.

Acest fenomen se numește emisiune termoionică și a constituit preocuparea unor cercetători. [1°]

Dacă sarea emițătoare de ioni se află depusă pe un filament încălzit într-un gaz rarefiat și, între filament și un alt electrod așezat la o distanță convenabil aleasă se creează un cîmp electric, atunci ionii emiși de substanța încălzită se mișcă în direcția cîmpului electric, formînd un curent termoionic.

Sub acțiunea cîmpului electric, ionii emiși de substanța încălzită ionizează la rîndul lor moleculele de gaz care se află între cei doi electrozi, formînd atît ioni pozitivi cît și negativi, care sunt dirijați spre cei doi electrozi, dînd naștere curentului termoionic.

Se constată că unele săruri și unii oxizi emit numai electroni, altele cum sunt halogenurile și sulfurile emit numai ioni pozitivi.

Substanțele semiconductoare preocupă din ce în ce mai mult pe fizicieni, ingineri și tehnicieni, avînd largi aplicații în laboratoare și industrie.

Din aceste substanțe fac parte și unele sulfuri, printre care și sulfura de nichel.

Cercetările noastre au fost făcute asupra acestei substanțe semiconductoare. În acest scop s-a folosit un vas de emisie (fig. 1), prevăzut în partea superioară și inferioară cu două șlifuri A și B prin care pătrund doi electrozi a și b. Electroductul aflat deasupra este un disc de alamă cu diametrul 2,5 cm, tip Rogowski, care poate fi apropiat și depărtat de celălalt electrod, cu ajutorul unui șurub micrometric ce poate fi manevrat prin rotirea șlifului c, operație care se poate efectua și în vid.

* Lucrare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice Universitatea București
— Facultatea de Matematică și Fizică din 5—6 Mai 1962.

Electrodul b este format dintr-o bandletă de platin, prevăzută cu două aducțiuni ce străbat șliful B, prin care se poate trimite un curent electric.

Bandleta are următoarele dimensiuni: lungimea este de 25 mm; grosimea este de 0,16 mm și lățimea este de 3,1 mm. În partea centrală pe o distanță de 5 mm bandleta este laminată avînd o grosime de 0,05 mm în scopul pe deoparte de a putea fi încălzită în această regiune

cu un curent electric de o intensitate relativ mică și pe de altă parte de a avea un regim de cîmp electric uniform, realizîndu-se astfel o suprafață de emisie echipotențială.

La centru pe o suprafață de 1 mm^2 bandleta avea o mică adîncitură, unde se așeza substanța de studiat.

Vasul de emisie este pus în legătură cu o instalație de vid, prevăzută cu o pompă rotativă cu ulei și o pompă de difuzie, care permite realizarea unei presiuni de 10^{-6} mm coloană Hg. S-a lucrat în domeniul de presiuni $6 \text{ mm} - 2 \cdot 10^{-5}$ mm coloană Hg măsurată cu ajutorul a două manometre de tip MacLeod cu scări diferite.

În figura 2 se poate vedea schema instalației electrice necesară studiului propus.

Încălzirea bandletei era realizată prin trecerea unui curent electric furnizat de o baterie de acumulatori B_1 ; curentul era reglat fin cu ajutorul unui sistem de reostate R_{h1} .

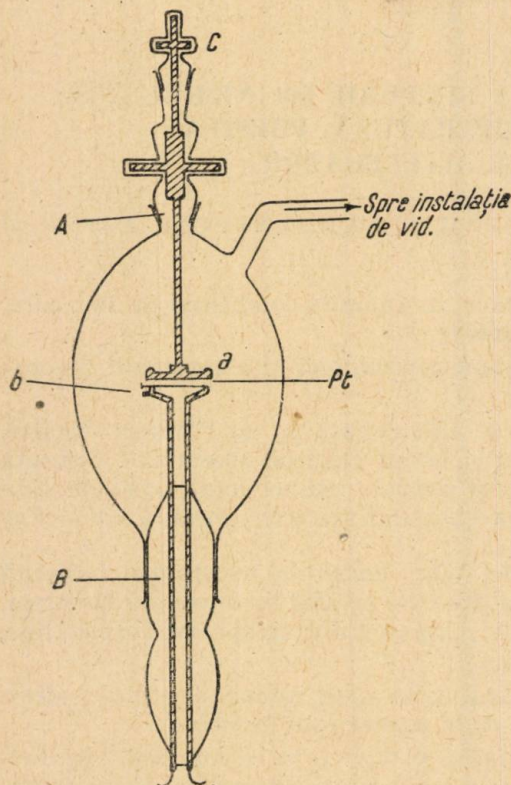


Fig. 1. Dispozitivul de emisie

Măsurarea rezistenței electrice s-a realizat cu o precizie bună, folosind un potențiomtru cu ajutorul căruia se măsoară căderea de tensiune E_x la bornele bandletei de platin cît și căderea de tensiune E , la bornele unei rezistențe etalon de același ordin de mărime cu al bandletei. Cu această metodă, eroarea relativă asupra măsurării rezistenței bandletei nu depășește 0,04%.

Cunoscîndu-se valoarea rezistenței electrice a bandletei încălzite, se putea determina temperatura substanței emițătoare depusă pe bandletă, după o prealabilă etalonare a rezistenței ei electrice în funcție de temperatură.

În acest dispozitiv experimental, bandleta se folosea și ca termometru cu rezistență. Ea a fost etalonată prin măsurarea rezistenței ei electrice la diferite temperaturi a unor săruri cu puncte de topire bine cunoscute. Cu datele obținute s-a trasat curba de etalonare a rezistenței electrice în funcție de temperatură, cu ajutorul căreia se poate determina temperatura de lucru.

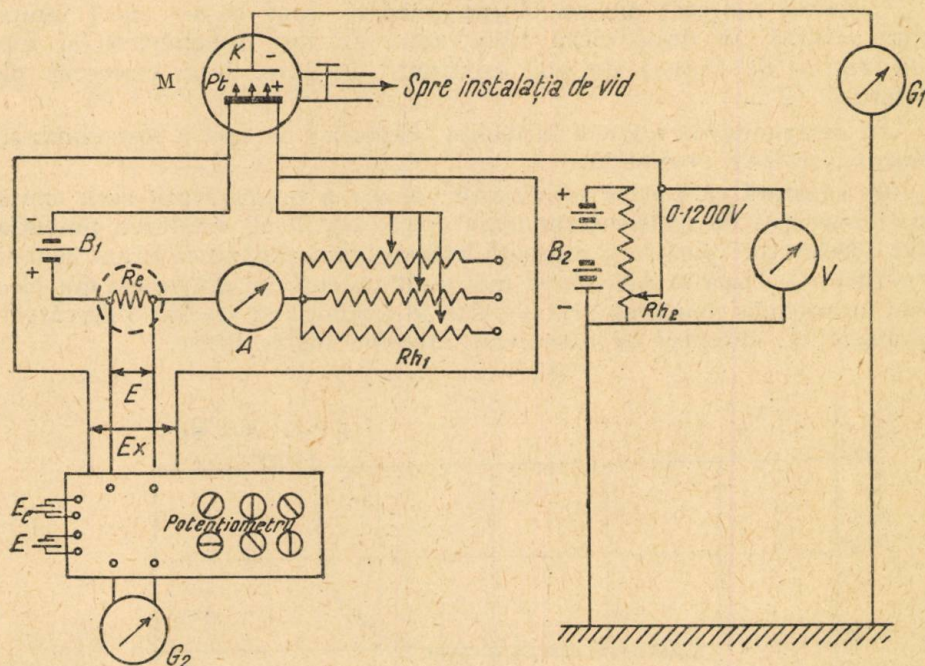


Fig. 2. Schema instalației electrice

M — vasul de emisie; Pt. — bandleta de platină; K — electrodul receptor; B₁ — baterie de joasă tensiune; B₂ — baterie de înaltă tensiune; P — potențiometr; A — ampermetru; V — voltmetru; G₁ și G₂ — galvanometre cu spot luminos; Rh₁ și Rh₂ — sisteme de reostată.

În timpul emisiunii, bandleta Pt. se afla la un potențial pozitiv care putea fi variat cu ajutorul unui divizor de tensiune Rh₂, folosindu-se în acest scop o baterie de înaltă tensiune B₂. Între cei doi electrozi se forma curentul de emisiune termoionică care era măsurat cu ajutorul unui galvanometru cu spot luminos G₁ a cărui sensibilitate este de 10⁻¹⁰ A/mm.m.

Bandleta de platină, folosită ca suport pentru sarea emițătoare, era degazată în prealabil prin încălzire la roșu în vid, apoi era acoperită în partea centrală pe o suprafață de 1 mm² cu un strat subțire și omogen de sulfură de nichel sub formă de pastă (care cerea o pregătire specială).

Deoarece s-a constatat că emisiunea sulfurii de nichel era mai abundentă la temperaturi apropiate de punctul ei de topire (797°C), se trecea

un curent electric de o intensitate convenabil aleasă, pînă ce se realiza temperatura dorită. Aceasta era măsurată pe cale electrică așa după cum s-a arătat.

Deoarece curentul de emisie depinde de presiune, temperatură, distanța dintre electrozi și potențial accelerator, s-a căutat să se cunoască modul în care acești parametri influențează asupra emisieii.

Curentul constant nu se obține imediat după ce s-a atins temperatura fixată, ci după cîtva timp, cînd au fost îndepărtate și ultimele resturi de vapori de apă conținuți de sare, fapt cunoscut din literatură. [2']

În determinările noastre influența vaporilor de apă a fost eliminată printr-o încălzire prealabilă.

Se constată că pentru o anumită valoare a temperaturii sării emițătoare, curentul de emisie termoionic crește odată cu creșterea potențialului accelerator, pînă la o anumită valoare cînd rămîne constant (curent de saturație). Dacă se mărește și mai mult potențialul dintre cei doi electrozi, se produce ionizarea prin șoc sau în avalanșe și are loc o descărcare luminescentă, curentul de descărcare crescînd foarte brusc.

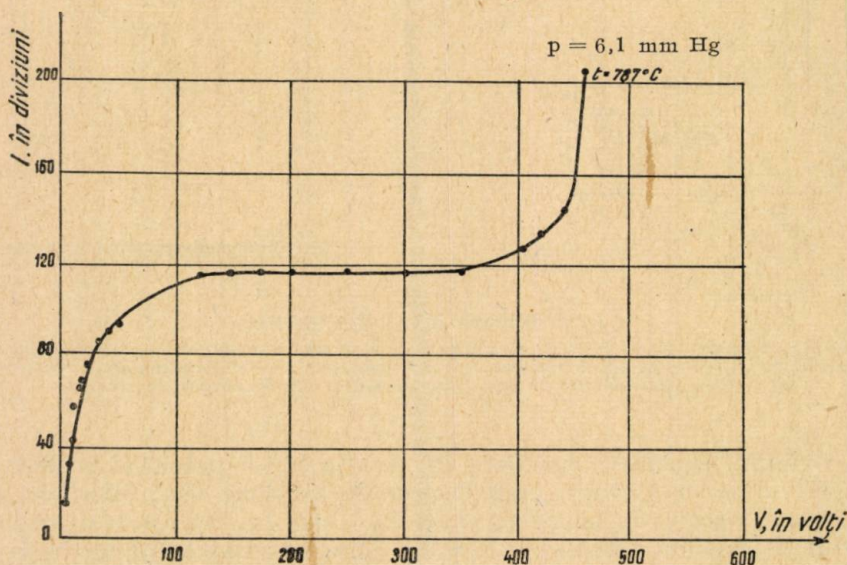


Fig. 3. Variația curentului de emisie termoionic a NiS în funcție de potențial accelerator.

O astfel de experiență este reprezentată grafic în fig. 3, unde se poate urmări intensitatea curentului de emisie termoionic în funcție de potențial accelerator pentru temperatura de 787°C și presiunea de 6,1 mm coloană Hg în care distanța dintre electrozi este de 3,75 mm.

Intensitatea curentului termoionic de saturație satisface ecuația Richardson-Dushman :

$$I = A \cdot T^2 \cdot e^{-b/T}$$

unde T este temperatura absolută a sării încălzite, iar A și b sînt două constante. Se cunoaște faptul că constanta b depinde de lucrul de extracție.

Astfel :

$$b = \frac{\varphi}{k} = \frac{e \cdot V}{k}$$

unde φ reprezintă lucrul de extracție, k constanta lui Boltzman, e sarcina electronului și V potențialul de extracție.

A. S-au făcut o serie de măsurători, studiindu-se dependența de temperatură a curentului de emisie termoionic, pentru diferite valori ale poten-

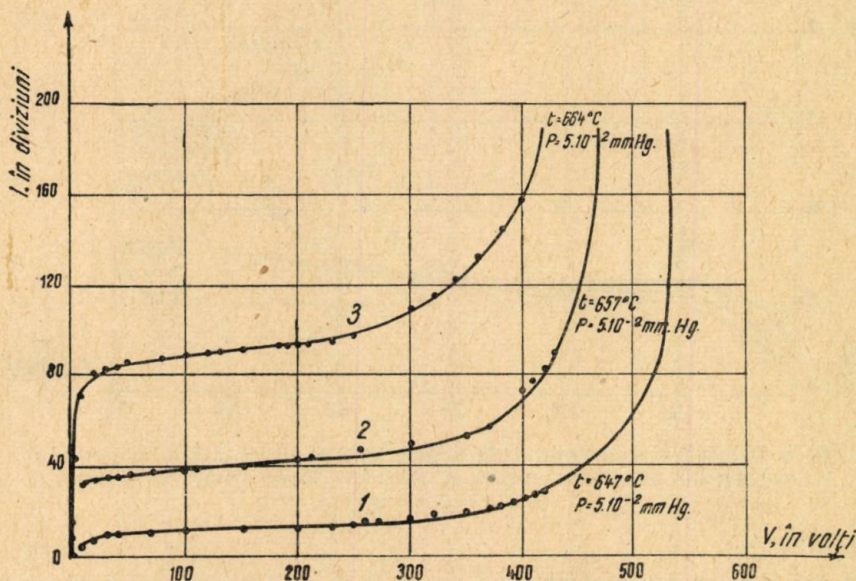


Fig. 4. Dependența curentului de emisie termoionic al NiS de potențialul accelerator la diferite temperaturi și presiune constantă.

1 — diviziune = 10^{-10} A

țialului accelerator, menținându-se constante presiunea (de exemplu presiunea de $5 \cdot 10^{-2}$ mm coloană Hg) și distanța dintre electrozi (de exemplu 3,75 mm).

Rezultatele acestor măsurători au fost reprezentate grafic în fig. 4, obținându-se curbele 1, 2, 3 corespunzătoare temperaturilor 647°C , 657°C

și 664°C, apropiate de temperatura de topire a sării. Experiențele efectuate în acest sens arată :

a. Intensitatea curentului termoionic de emisie de saturație crește cu temperatura.

b. Potențialul disruptiv se atinge cu atât mai repede cu cât temperatura de emisie este mai ridicată.

c. Lungimea palierului de saturație este mai mică când temperatura este mai ridicată.

B. O altă serie de experiențe, pune în evidență dependența de presiune a curentului termoionic de emisie, pentru diferite valori ale potențialului accelerator, lucrându-se la temperatură constantă (de exemplu la temperatura de 656°C) și aceeași distanță între electrozi (3,75 mm).

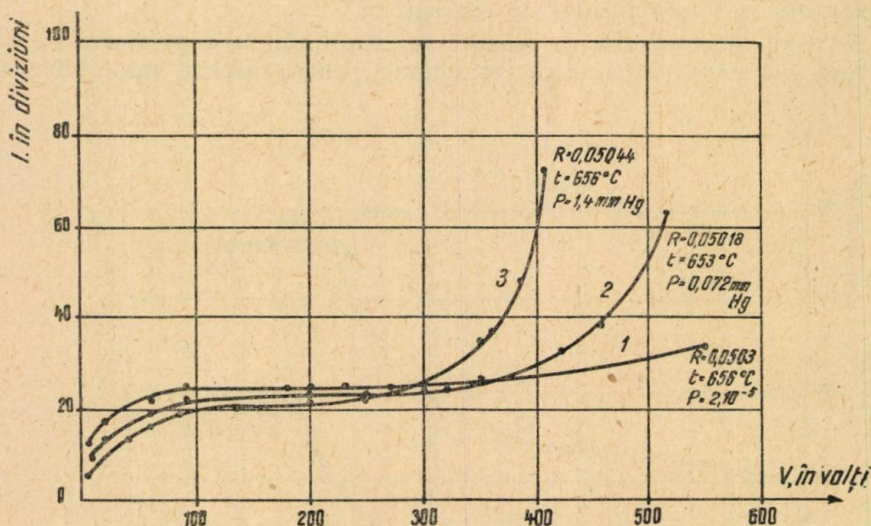


Fig. 5. Dependența curentului de emisie termoionic al NiS de potențialul accelerator, la diferite presiuni, pentru o temperatură constantă.

1 — diviziune = 10^{-10} A

S-au reprezentat astfel curbele 1, 2, 3 corespunzătoare presiunilor $2 \cdot 10^{-5}$ mm col. Hg, 0,072 mm col Hg, 1,4 mm col Hg (fig 5).

Din studiul rezultatelor experimentale cât și a curbelor reprezentate în fig. 5 se constată următoarele :

a. Intensitatea curentului de saturație este aproximativ aceeași pentru diferite presiuni.

b. Potențialul disruptiv se atinge cu atât mai repede, cu cât presiunea este mai ridicată pentru domeniul de presiuni în care s-a lucrat.

c. Lungimea palierelor de saturație este cu atât mai mică, cu cât presiunea este mai mare.

Folosind datele din experiențele efectuate, s-a calculat densitatea curentului termoionic de saturație în A/cm^2 . Aceste valori sunt date în tabelul nr. 1.

Tabelul nr. 1

Substanța	$T^{\circ}\text{K}$	Presiunea $\text{mm} \cdot \text{col} \cdot \text{Hg}$	$I \text{ A/cm}^2$
NiS	913	$5 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-7}$
	920	$5 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$
	926	0,072	$2 \cdot 10^{-7}$
	929	$2 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-7}$
	929	1,4	$1,8 \cdot 10^{-7}$
	930	$5 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$
	937	$5 \cdot 10^{-2}$	$9,2 \cdot 10^{-7}$
	960	6,1	$11,2 \cdot 10^{-7}$

Se observă că densitatea curentului termoionic de saturație pentru domeniul de temperaturi și presiuni arătate în tabel variază între $1,5 \cdot 10^{-7} \text{ A/cm}^2$ și $11,2 \cdot 10^{-7} \text{ A/cm}^2$.

Astfel se remarcă dependența curentului termoionic față de temperatura sării emițătoare încălzite; pentru o temperatură mai mare corespunde o densitate de curent mai mare.

Determinarea lucrului de extracție al ionilor din rețeaua cristalină s-a realizat prin metoda dreptei lui Richardson.

S-a considerat ecuația lui Richardson pentru două temperaturi diferite (ecuațiile 1 și 2);

$$1) \quad I_1 = A \cdot T_1^2 \cdot e^{-b/T_1}$$

$$2) \quad I_2 = A \cdot T_2^2 \cdot e^{-b/T_2}$$

aplicînd logaritmi ecuațiilor 1 și 2 și substituind:

$$X_1 = \log \cdot \frac{I_1}{T_1^2}; \quad Y_1 = \frac{1}{T_1}$$

$$X_2 = \log \cdot \frac{I_2}{T_2^2}; \quad Y_2 = \frac{1}{T_2}$$

se obține:

$$3) \quad X_1 = \log A - b \cdot Y_1 \cdot \log e$$

$$4) \quad X_2 = \log A - b \cdot Y_2 \cdot \log e$$

Dacă se substitue $\alpha = \log \cdot A$ și $\beta = b \cdot \log e$ și se rezolvă sistemul obținut:

$$X_1 = \alpha - \beta Y_1$$

$$X_2 = \alpha - \beta Y_2$$

se obține pentru β expresia :

$$\beta = \frac{T_1 \cdot T_2 [(\log I_1 - 2 \log T_1) - (\log I_2 - 2 \log T_2)]}{T_1 - T_2}$$

unde T_1 și T_2 sînt temperaturile absolute și I_1, I_2 densitățile pentru curentul termoionic de saturație în A/cm², corespunzătoare temperaturilor respective.

Din ecuația de substituție $\beta = b \cdot \log \cdot e$ se pot determina valorile : b și φ unde b este constanta din ecuația lui Richardson, iar φ lucrul de extracție în electroni volți. Valoarea medie a acestor mărimi este trecută în tabelul nr. 2

Tabelul nr. 1

Substanța	b	e V
NiS	$1,44 \cdot 10^4$	1,24

CONSIDERAȚIUNI GENERALE

1. S-a realizat un vas de descărcare propriu emisiunii termoionice a sărurilor încălzite, cu electrod echipotențial.

2. Intensitatea curentului de emisie termoionic de saturație crește cu temperatura sării emițătoare, avînd cele mai mari valori în apropierea temperaturii de topire a sulfurii de nichel (797°C).

3. Valorile potențialului disruptiv sînt mai mici în domeniul de presiuni relativ mari (de ordinul milimetrilor col. Hg), decît acelea corespunzătoare presiunilor mai mici.

4. În toate cazurile studiate s-a obținut un curent de emisie de saturație, pus în evidență prin palier.

5. Lucrul necesar pentru extracția ionului de sulfură de nichel are o valoare medie de 1,24 eV.

BIBLIOGRAFIE

10. O. W. Richardson: *Emission of electricity from hot bodies* (1921).
Eugène Bloch: *Les phénomènes thermoioniques* (1923).
A. F. Joffe: *Semiconductorii în fizica modernă*. Vol. 2, p. 266.
N. A. Карпов: *Fenomene electrice în gaze și în vid*. Cap. 3, p. 59, Editura tehnică 1955.
C. B. Птицын, Ж. Т. Ф., А, 9, 965 (1947) оксидный катод (обзорная статья).
A. Nicolau: *Contribuțiuni la studiul razelor termoionice pozitive*. (1934).
20. Birkenberg. *An. der Physik* p. 157 (1929).
Journal of Applied Physics. 1961 (32).

ТЕПЛОИОННАЯ ЭМИССИЯ СЕРНИСТОГО НИКЕЛЯ (Ni S) В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ, ДАВЛЕНИЯ И УСКОРИТЕЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Данная работа — это экспериментальное исследование теплоионной эмиссии сернистого никеля (< Ni S), который является полупроводным веществом.

Авторы создали сосуд для разряжения, пригодный для теплоионной эмиссии нагретых солей, с равнопотенциальным электродом.

В этой работе показан экспериментальный прибор, который был использован, а также полученные результаты.

Был изучен способ, которым давление, температура, расстояние между электродами и ускорительный потенциал влияют на теплоионную эмиссию сернистого никеля, которая, как было установлено, положительна.

Ряд измерений произведенных над этим веществом, нагретым почти до температуры его плавления, показывает зависимость теплоионного эмиссионного тока от температуры, для разных значений ускорительного потенциала, сохраняя постоянное давление и расстояние между электродами.

Результаты были изображены графически, обнаруживая поведение эмиссии солей в таких условиях.

Другая серия измерений, произведенных при постоянной температуре и одинаковом расстоянии между электродами, представленными графически, обнаруживает зависимость теплоионного эмиссионного тока от давления для разных значений ускорительного потенциала в областях давлений от 6—2. 10^{-5} т.т. колонки ртути.

С помощью полученных в разных опытах значений была вычислена плотность теплоионного тока насыщенности.

Результаты даны в виде таблицы.

Используя метод прямой Ричардсона, была вычислена работа, необходимая для вырывания электронов из кристаллической решетки сернистого никеля, значение которой составляет 1. 24 е. V.

Во всех изученных случаях получился теплоионный ток насыщенности, который был обнаружен при помощи палиера.

Было установлено, что интенсивность эмиссионного теплоионного тока возрастает одновременно с температурой, имея наибольшие значения вблизи температуры плавления сернистого никеля.

Значения потенциала вырывания были незначительны при сравнительно больших давлениях, порядка миллиметров колонки ртути и обратно.

Thermionenemission von Nickelsulfid (NiS) in Abhängigkeit der Temperatur, des Druckes und des Potentialgefalles

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit stellt eine experimentelle Untersuchung der Thermionenemission aus dem Halbleiter Nickelsulfid (NiS) dar.

Die Autoren haben ein der Thermionenemission erwärmter Salze spezifisches Entladungsgefäß geschaffen, mit äquipotentialer Anode und beweglicher Kathode.

In der Arbeit werden sowohl die experimentellen Versuchseinrichtungen als auch die Ergebnisse mitgeteilt.

Es wird der Einfluss des Druckes, der Temperatur, des Elektrodenabstandes und des Potentialunterschiedes des auf die Thermionenemission des NiS untersucht, von der festgestellt wurde, dass sie positiv ist.

Eine Reihe von Bestimmungen, die in der Nähe des Schmelzpunktes vorgenommen wurden, zeigen die Temperaturabhängigkeit der Thermionenemissionsstromstärke für verschiedene Potentialgefälle, bei konstantem Druck und Elektrodenabstand.

Die Ergebnisse wurden graphisch dargestellt, dadurch konnte das Verhalten der Ionenemission des Salzes unter den gegebenen Bedingungen in Erscheinung gebracht werden.

Eine andere Messreihe, bei konstanter Temperatur und konstantem Abstand, zeigt, graphisch dargestellt, die Druckabhängigkeit der Thermionenemission für Drucke zwischen 6 Torr — 2. 10^{-5} Torr., bei verschiedenen Potentialunterschieden.

Mit Hilfe der aus verschiedenen Bestimmungen erhaltenen Stromdichte wurde der thermionische Sättigungsstrom berechnet. Die Ergebnisse sind tabelliert. Mit Hilfe der Richardson'schen Geraden wurde die Austrittsarbeit der Ionen aus dem Kristallgitter berechnet. Es wurde folgender Wert gefunden: 1,24 eV.

In allen Fällen konnte ein Sättigungsstrom erreicht werden. Der Thermionenstrom wächst bei NiS mit Temperatur, und erreicht die grössten Werte in der Nähe der Schmelztemperatur.

Die Werte der Zundspannung sind bei grösseren Drucken (1 Torr.) kleiner und umgekehrt.

DESPRE SARCINA SPAȚIALĂ LA SUPRAFAȚA SEMICONDUCTORILOR

IOAN LICEA

Cercetările efectuate în ultimii ani au scos la iveală complexitatea structurii suprafeței semiconductorilor. Este cunoscut astfel faptul că suprafața cristalului semiconductor, chiar dacă acesta nu este ținut în mod special în oxigen ci numai datorită contactului cu atmosfera, se oxidează formînd un strat de oxid, care, datorită fenomenelor de absorbție și adsorbție, conține atomi și molecule ale gazelor din mediul înconjurător. Ca rezultat apare un sistem de nivele energetice locale, al căror calcul, dificil deocămdată datorită necunoașterii exacte a grosimii și structurii stratului de oxid, confirmă existența unor stări energetice localizate în banda interzisă în apropierea suprafeței semiconductorului [1, 2]. Astfel de stări pot să existe atît în stratul de oxid cît și la frontiera semiconductor-oxid, aceasta fiind considerată ca o perturbare a periodicității cristalului.

Defectele în stratul de oxid, datorită atomilor absorbiți și adsorbiți la suprafață sau distrugerea rețelei ideale la frontiera de separare, contribuie la formarea stărilor de suprafață, care pot fi de tip donor sau acceptor. Gradul de completare al stărilor de suprafață se determină cu poziția nivelului Fermi și, în general vorbind, aceste stări vor fi pozitiv sau negativ încărcate.

Suma sarcinilor în diferite stări de suprafață se determină cu direcția și mărimea curbării bandelor energetice la suprafață. Dacă, de exemplu, sarcina este negativă, atunci bandele se curbează astfel încît electronii vor fi respinși de la suprafață, iar găurile vor fi atrase.

În semiconductorul de tip *n* ca rezultat al acestei curbări a bandelor se poate forma un strat subțire în care numărul găurilor este mai mare decît numărul electronilor. Un fenomen analog poate avea loc, cu schimbările corespunzătoare, și în semiconductorul de tip *p*. Astfel de straturi la suprafață, al căror tip al conductibilității se deosebește de cel în volum (spațial), se numesc *straturi de inversiune*. În cazul stratului de inversiune există o sarcină de suprafață urmată de o regiune cu sarcină spațială de semn opus, care pătrunde pînă la o adîncime de ordinul 10^{-5} cm de la suprafață, deci întregul strat de inversiune trebuie considerat ca un strat de suprafață.

Determinarea sarcinii spațiale totale de la suprafața semiconductorului, considerînd stratul de inversiune, precum și problema conductibilității stratului de inversiune este tratată într-o serie de lucrări [2, 3, 4] considerîndu-se temperaturi apropiate de cea a camerei, cînd se poate considera ionizarea totală a nivelelor donoare și acceptoare și este aplicabilă statistica Boltzmann.

În cele ce urmează, se determină sarcina spațială de la suprafața semiconductorului, considerînd stratul de inversiune, în cazul unor temperaturi suficient de joase, cînd donorii și acceptorii nu se mai pot considera complet ionizați și este necesară utilizarea statisticii Fermi.

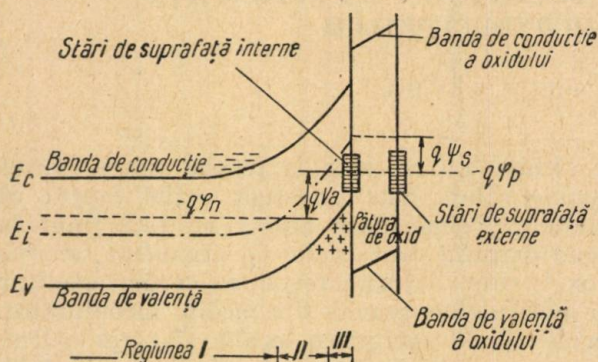


Fig. 1. Dispunerea bandelor energetice și structura stărilor de suprafață la suprafața semiconductorului.

Se consideră modelul unui cristal semiinfinit și se admite o concentrație uniformă a impurităților în imediata apropiere a suprafeței. Calculul se efectuează pentru semiconductorul de tip n la suprafața căruia există un strat de inversiune de tip p și o tensiune exterioară V_a aplicată în direcția axei de referință considerate (axa x), astfel că bandele energetice la suprafață sînt curbate în sus.

Rezultatele sînt aplicabile și pentru semiconductorul de tip p cu strat de inversiune de tip n, făcînd schimbările corespunzătoare. Dispunerea bandelor energetice și structura stărilor de suprafață la suprafața semiconductorului este redată schematic în fig. 1. [3] Deoarece între stratul de inversiune de tip p și semiconductorul de tip n cu care se învecinează este aplicată o tensiune, semiconductorul se caracterizează prin două cuasinivele Fermi — $q\varphi_n$ și — $q\varphi_p$. Valoarea lui φ_n se consideră, ca în mod obișnuit, aproximativ constantă în regiunea electronică, iar a lui φ_p în regiunea stratului de inversiune [5]*. Potențialul se consideră de la poziția nivelului Fermi în adîncimea eșantionului. Pentru definirea sa se consideră energia E_i a mijlocului bandei interzise, care reprezintă energia pe care ar lua-o E_F dacă semiconductorul ar fi intrinsec. Astfel, într-un punct oarecare potențialul va fi definit prin:

$$\Psi = \frac{E_F - E_i}{q} \quad (1)$$

q fiind sarcina electronului. Se observă că potențialul este pozitiv dacă E_i se află sub E_F , adică semiconductorul e de tip n.

* Dacă o astfel de presupunere nu se poate face, ca în cazul aplicării unor tensiuni mari, atunci problema devine extrem de complexă deoarece trebuie să se considere conductibilitatea bipolară în prezența sarcinii spațiale.

Determinarea potențialului în apropierea suprafeței se obține prin rezolvarea ecuației lui Poisson. Considerînd, datorită distribuției uniforme, sarcinile și potențialele electrochimice constante pe direcțiile paralele cu suprafața semiconductorului, variația potențialului Ψ și a densității de sarcină ρ are loc numai în direcția perpendiculară pe suprafață. Dacă x este axa de referință pe această direcție, atunci ecuația lui Poisson are forma, (utilizînd sistemul neraționalizat de unități) :

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = - \frac{4\pi}{\epsilon \epsilon_0} \rho(x) \quad (2)$$

unde

ϵ — permitivitatea dielectrică a semiconductorului,
 $\rho(x)$ — densitatea sarcinii spațiale.

Pentru a face integrarea, de la regiunea neutră din volumul eșantionului pînă la suprafață, este necesară în prealabil obținerea expresiei explicite pentru densitatea de sarcină, care depinde de purtătorii de sarcină mobili, electroni și găuri, și de centrii de impurități ionizați ficși.

Densitatea sarcinii spațiale se determină cu expresia :

$$\rho = q(n_D - p_A + p - n) \quad (3)$$

unde :

n și p — concentrațiile purtătorilor de sarcină liberi (electroni și găuri).
 n_D și p_A — concentrațiile electronilor și găurilor în stările legate de donori și respectiv acceptori.

Fie, E_v — limita superioară a bandei de valență,

E_c — limita inferioară a bandei de conducție,

N_D, E_D — concentrația și poziția energetică a nivelelor donoare,

N_A, E_A — concentrația și poziția energetică a nivelelor acceptoare,

m_n^*, m_p^* — masele efective ale electronului și găurii,

k — constanta lui Boltzmann; T — temperatura absolută.

Concentrația electronilor în banda de conducție este dată de [6] :
iar concentrația găurilor în banda de valență de :

$$n = 4\pi \left(\frac{2m_n^*}{h^2} \right)^{3/2} \int_{E_c}^{\infty} \frac{(E - E_c)^{1/2} dE}{1 + e^{\frac{E - E_F}{kT}}} \quad (4)$$

iar concentrația găurilor în banda de valență de :

$$p = 4\pi \left(\frac{2m_p^*}{h^2} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{E_v} \frac{(E_v - E)^{1/2} dE}{1 + e^{\frac{E - E_F}{kT}}} \quad (5)$$

În expresiile (4) și (5) s-a considerat și faptul că o stare poate fi ocupată de doi electroni de spin opus, ceea ce revine la înmulțirea cu factorul 2. Deoarece lărgimea bandei, obișnuit este mare în comparație cu kT , iar

funcția Fermi descrescînd repede, integralele converg rapid, limitele superioară (pentru banda de conducție) și inferioară (pentru banda de valență) s-au considerat $+\infty$ și $-\infty$ corespunzător.

Concentrația electronilor pe nivelele donoare și a găurilor pe nivelele acceptoare se consideră dată de :

$$n_D = \frac{N_D}{1 + \frac{1}{2} e^{\frac{E_D - E_F}{kT}}} \quad (6)$$

și

$$p_A = \frac{N_A}{1 + 2e^{\frac{E_A - E_F}{kT}}} \quad (7)$$

unde ca și anterior s-a luat în considerare spinul.

Introducînd notațiile :

$$u = \frac{q\psi}{kT} \quad (8a)$$

$$\frac{E_i - E_C}{kT} = \mathcal{E}_C, \quad \frac{E_V - E_i}{kT} = \mathcal{E}_V, \quad \frac{E_i - E_D}{kT} = \mathcal{E}_D, \quad \frac{E_A - E_i}{kT} = \mathcal{E}_A \quad (8b)$$

precum și funcția care exprimă integrala generalizată a lui Fermi, tabelată în [7] :

$$F_\alpha(\beta) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1 + e^{x-\beta}} \quad (8c)$$

pentru valorile $\alpha = \frac{1}{2}$ și $\alpha = \frac{3}{2}$, ecuația lui Poisson devine :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = - \frac{4\pi}{\epsilon \epsilon_0} \frac{q}{kT} \rho(x) \quad (9)$$

iar expresiile (4), (5), (6) și (7) :

$$n = 4\pi \left(\frac{2m_n^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(u + \mathcal{E}_C) \quad (10)$$

$$p = 4\pi \left(\frac{2m_p^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(-u + \mathcal{E}_V) \quad (11)$$

$$n_D = \frac{N_D}{1 + \frac{1}{2} e^{-(u + \mathcal{E}_D)}} \quad (12)$$

și

$$p_A = \frac{N_A}{1 + 2e^{(u - \mathcal{E}_A)}} \quad (13)$$

Datorită deosebirii de structură a cristalului în cele trei regiuni distincte, indicate în fig. 1, expresia densității de sarcină trebuie scrisă separat pentru fiecare regiune în parte. Deoarece cazul ales în figură este al semiconductorului de tip n cu strat de inversiune de tip p, densitatea găurilor legate de acceptori — $q p_A$, nu intervine în calcule*. Aceasta de altfel se vede din studiul comportării potențialului și a densității de sarcină în cele trei regiuni, care, conform cu schema din fig. 1, se prezintă în felul următor:

Regiunea I — Potențialul satisface condițiilor $\Psi_N > \Psi \gg 0$ în care Ψ_N reprezintă potențialul în adîncimea semiconductorului în regiunea electro-nică. În notația introdusă (8a), aceste condiții devin:

$$u_N > u \gg 0 \quad (14)$$

În această regiune sarcina datorită găurilor se poate neglija și densitatea de sarcină va fi dată de:

$$\rho_I = \rho(n_D - n) = 4\pi q \left(\frac{2m_n^* k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} F_1 \left(\frac{u + \mathcal{E}_c}{2} \right) - \frac{q N_D}{1 + \frac{1}{2} e^{-(u + \mathcal{E}_D)}} \quad (15)$$

Regiunea II — Potențialul satisface condițiilor $0 > \Psi \gg -V_a$, în care V_a reprezintă tensiunea aplicată. Trecînd la notația (8a) și notînd de asemenea $\frac{q V_a}{k T} = \mathcal{E}_a$, aceste condiții devin:

$$0 > u \gg \mathcal{E}_a \quad (16)$$

În această regiune sarcina purtătorilor liberi, electroni și găuri, poate fi considerată foarte mică în comparație cu cea datorită electronilor de pe donori și neglijînd-o densitatea de sarcină se va exprima prin:

$$\rho_{II} = q n_D = \frac{q N_D}{1 + \frac{1}{2} e^{-(u + \mathcal{E}_D)}} \quad (17)$$

Regiunea III — Potențialul satisface condițiilor $-V_a > \Psi \geq -V_a - \Psi_s$, în care Ψ_s reprezintă valoarea pe care ar lua-o potențialul la suprafață în semiconductorul intrinsec. Notînd $\frac{q \Psi_s}{k T} = u_s$ și utilizînd notațiile anterioare ele capătă forma:

$$-\mathcal{E}_a > u \geq -(\mathcal{E}_a + u_s) \quad (18)$$

În această regiune sarcina poate fi considerată ca fiind datorită numai găurilor libere și a electronilor de pe donori. Pentru a scrie expresia densității de sarcină aici trebuie ținut însă seama că potențialului i se adaugă tensiunea V_a . Astfel densitatea de sarcină va fi dată de:

$$\rho_{III} = q(n_D + p) = \frac{q N_D}{1 + \frac{1}{2} e^{-(u + \mathcal{E}_a + \mathcal{E}_D)}} + 4\pi q \left(\frac{2m_p^* k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} F_1 \left(\frac{-u - \mathcal{E}_a + \mathcal{E}_v}{2} \right) \quad (19)$$

* Ea se ia în considerare în cazul semiconductorului de tip p cu strat de inversiune de tip n și atunci densitatea electronilor legați de donori $+q n_D$, nu intervine în calcule.

Integrând ecuația lui Poisson între limitele corespunzătoare volumului și suprafeței, deci conform cu cele anterioare pentru valori ale lui u de la $u = u_N$ pînă la $u = -(\mathcal{C}_a + u_s)$, avem :

$$\int_0^{\left(\frac{du}{dx}\right)_{u=u_s}} \left(\frac{du}{dx}\right) d\left(\frac{du}{dx}\right) = -\frac{4\pi}{\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{kT} \left[\int_{u_N}^0 \rho_I du + \int_0^{-\mathcal{C}_a} \rho_{II} du + \int_{-\mathcal{C}_a}^{-(\mathcal{C}_a+u_s)} \rho_{III} du \right]$$

Efectuînd integralele și ținînd seama că pentru $\alpha > 0$ este satisfăcută relația :

$$\frac{\partial F_\alpha(\beta)}{\partial \beta} = \alpha F_{\alpha-1}(\beta)$$

se obține :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)_{u=u_s}^2 &= \frac{4\pi}{\epsilon\epsilon_0} \frac{q^2}{kT} \left\{ 4\pi \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{2m_n^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[F_{\frac{3}{2}}(u_N + \mathcal{C}_v) - F_{\frac{3}{2}}(\mathcal{C}_v) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 4\pi \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{2m_p^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[F_{\frac{3}{2}}(u_s + \mathcal{C}_v) - F_{\frac{3}{2}}(\mathcal{C}_v) \right] - \right. \\ &\quad \left. - N_D \ln \frac{(1 + 2e^{u_N + \mathcal{C}_D})(1 + 2e^{-\mathcal{C}_a + \mathcal{C}_D})(1 + 2e^{-u_s + \mathcal{C}_D})}{(1 + 2e^{\mathcal{C}_D})^3} \right\} \end{aligned}$$

Mărimea cîmpului la suprafață fiind

$$\mathcal{E}_s = - \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)_{\Psi=\Psi_s} = - \frac{kT}{q} \left(\frac{du}{dx} \right)_{u=u_s} \quad (20)$$

conform cu teorema lui Gauss, sarcina spațială corespunzătoare pe unitatea de suprafață va fi dată de :

$$Q = \frac{\epsilon\epsilon_0}{4\pi} \mathcal{E}_s = - \frac{\epsilon\epsilon_0}{4\pi} \frac{kT}{q} \left(\frac{du}{dx} \right)_{u=u_s} \quad (21)$$

Ținînd seama că, conform cu relațiile (10) și (11), concentrația n_i a electronilor și găurilor în semiconductorul intrinsec este dată de :

$$n_i = 4\pi \left(\frac{2m_n^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\mathcal{C}_v) = 4\pi \left(\frac{2m_p^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\mathcal{C}_v) \quad (22)$$

introducînd lungimea Debye de ecranare $\mathcal{L}$, definită prin [6] :

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\epsilon\epsilon_0 kT}{8\pi q^2 n_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

și notația :

$$\frac{N_D}{n_i} = \gamma_D \quad (24)$$

se obține, făcând abstracție de semn :

$$Q(u_N, u_s, \mathcal{O}_a) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4\pi\mathcal{L}} \frac{kT}{q} \left[\frac{2}{3} \frac{F_{3/2}(u_N + \mathcal{O}_c) - F_{3/2}(\mathcal{O}_c)}{F_{1/2}(\mathcal{O}_c)} + \frac{2}{3} \frac{F_{3/2}(u_s + \mathcal{O}_v) - F_{3/2}(\mathcal{O}_v)}{F_{1/2}(\mathcal{O}_v)} - \right. \\ \left. - \gamma_D \ln \frac{(1 + 2e^{u_N + \mathcal{O}_D})(1 + 2e^{-\mathcal{O}_a + \mathcal{O}_D})(1 + 2e^{-u_s + \mathcal{O}_D})}{(1 + 2e^{\mathcal{O}_D})^3} \right]^{1/2} \quad (25)$$

Această expresie este o generalizare, în cadrul considerentelor enunțate la început, a expresiei corespunzătoare pentru sarcina spațială din [3]. Presupunînd că potențialul este astfel încît satisface condițiilor

$$u_N + \mathcal{O}_C \gg 1 \quad \text{și} \quad u_s + \mathcal{O}_v \gg 1 \quad (26)$$

atunci se poate folosi faptul că pentru $\beta \gg 1$

$$F_{1/2}(\beta) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^\beta \quad \text{și} \quad F_{3/2}(\beta) \approx \frac{3\sqrt{\pi}}{4} e^\beta \quad (27)$$

și expresia (25) devine :

$$Q(u_N, u_s, \mathcal{O}_a) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4\pi\mathcal{L}} \frac{kT}{q} \left[(e^{u_N} - 1) + (e^{u_s} - 1) - \right. \\ \left. - \gamma_D \ln \frac{(1 + 2e^{u_N + \mathcal{O}_D})(1 + 2e^{-\mathcal{O}_a + \mathcal{O}_D})(1 + 2e^{-u_s + \mathcal{O}_D})}{(1 + 2e^{\mathcal{O}_D})^3} \right]^{1/2}$$

Admițînd în continuare că $\mathcal{O}_D$ este astfel încît exponențialele de sub logaritmi sînt cu mult mai mari decît unitatea și ținînd din nou seama de condiția (26), vom neglija în expresia de mai sus toți termenii egali cu unitatea. Atunci obținem :

$$Q = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4\pi\mathcal{L}} \frac{kT}{q} \left[e^{u_N} + e^{u_s} - \gamma_D(u_N - u_s - \mathcal{O}_a) \right]^{1/2} \quad (28)$$

expresie care corespunde aproximației Boltzmann. Într-adevăr, înlocuind valorile lui $\mathcal{L}$ și γ_D conform cu (23) și (24), ținînd seama că în acest caz $n_D = n_i e^{u_N}$ și trecînd la notația inițială a potențialului Ψ se obține expresia dată în [3]^{*)} pentru sarcina spațială :

$$Q^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{8\pi} \left[\rho_D \left(\psi_N - \psi_s - v_a - \frac{kT}{q} \right) + qn_i \frac{kT}{q} e^{\frac{q\psi_s}{kT}} \right] \quad (29)$$

Să exprimăm acum și sarcina stratului de inversiune. Avem :

$$\Gamma_p = \int_{\text{regiile III}} p \frac{1}{dx} dx = - \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4\pi} \frac{kT}{q} \int_{-\mathcal{O}_a}^{-(\mathcal{O}_a + u_s)} \frac{p}{Q(u_N, u, \mathcal{O}_a)} du \quad (30)$$

*) În expresia finală pentru Q^2 în [3] se introduc valorile absolute ale mărimilor utilizate.

$Q(u_N, u, \mathcal{C}_a)$ fiind determinat cu relația (25), în care se înlocuiește $u_s \rightarrow u$. Considerînd concentrația găurilor conform cu relația (19), ținînd seama de relațiile (22) și (23), și schimbînd variabila de integrare, se obține:

$$\Gamma_p = \frac{1}{2qF_{1/2}(\mathcal{C}_a)} \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 kT}{4\pi q\mathcal{Q}} \right)^2 \int_0^{u_s} \frac{F_{1/2}(\xi + \mathcal{C}_a) d\xi}{Q(u_N, \xi, \mathcal{C}_a)}$$

Calculul acestei expresii însă implică dificultăți matematice și de aceea trebuie făcute simplificări admisibile în diferite condiții ale problemei.

Expresii analoage se obțin în cazul considerării unui semiconductor de tip p cu strat de inversiune de tip n, efectuîndu-se pe parcurs schimbările corespunzătoare menționate.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Christensen: *Proc. IRE*, 42, 9, 1371 (1954).
2. R. H. Kingston: *Phys. Rev.*, 98, 6, 1766 (1955).
3. H. Statz și colab.: *Phys. Rev.*, 101, 4, 1272 (1956).
4. J. R. Schrieffer: *Phys. Rev.*, 97, 3, 641 (1955).
5. C. G. B. Garrett, W. H. Brattain: *Phys. Rev.*: 99, 376 (1955).
6. W. Shockley: *Electrons and holes in semiconductors*, New York, 1950.
7. Mc. Dougall, E. C. Stoner: *Trans. Roy. Soc.*, A 237, 67 (1938).

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ЗАРЯДЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Определяется пространственный заряд на поверхности полупроводников, принимая во внимание инверсионный слой, в случае достаточно низких температур, когда доноры и акцепторы не могут считаться полностью ионизированными, так что необходимо использовать статистику Ферми.

SUR LA CHARGE D'ESPACE À LA SURFACE DES SEMICONDUCTEURS

R É S U M É

On détermine la charge d'espace à la surface des semiconducteurs, tout en considérant la couche d'inversion dans les cas des températures assez basses, quand les niveaux donneurs et accepteurs ne peuvent être considérés totalement ionisés. Il est nécessaire d'utiliser, dans ce cas, la statistique Fermi.

DESPRE DETERMINAREA DEPENDENȚEI DE TEMPERATURĂ A MOBILITĂȚII PURTĂTORILOR DE SARCINĂ ÎN SEMICONDUCTORI

IOAN LICEA

Mobilitatea purtătorilor de sarcină reprezintă, după cum se știe, unul dintre parametrii caracteristici ai semiconductoarelor. Pentru studiul și determinarea acestor parametri sînt utilizate un număr mare de metode experimentale. Dintre acestea unele sînt metode generale aplicabile unei clase largi de semiconductori, în timp ce multe dintre ele sînt utilizabile numai la cercetarea unor tipuri speciali de semiconductori.

Ne vom referi la acest din urmă caz, considerînd din clasa semiconductoarelor compuși cu proprietăți semiconductoare ai oxizilor unor metale cuprinse în tabloul lui Mendeleev în special între T_i ($Z = 22$) și Cu ($Z = 29$), care au proprietatea de a-și schimba ușor valența în combinații¹. Compoziția acestor substanțe abătîndu-se de la cea stoechiometrică, ionii elementelor care compun rețeaua fundamentală în exces față de compoziția stoechiometrică creează nivele suplimentare în banda interzisă, donoare sau acceptoare, în funcție de componenta chimică în exces. Mecanismul conductibilității lor electrice poate fi considerat ca fiind determinat în mod esențial de existența impurităților în semiconductor, înțelegînd prin impurități ionii elementelor în exces față de compoziția stoechiometrică care determină formula chimică.

Pentru un interval de temperaturi situat în jurul celei a camerei sau nu prea depărtate de aceasta, se poate considera esențială numai împrăștierea termică. În acest caz vom exprima dependența mobilității de temperatură sub forma [1]:

$$\mu_{n,p} = a_{n,p} T^{-\alpha_{n,p}} \quad (1)$$

unde $a_{n,p}$ este o constantă (admițînd că masa efectivă a purtătorilor de sarcină nu depinde de temperatură), iar $\alpha_{n,p}$ un coeficient numeric, ambii

¹ Acești compuși semiconductori prezintă o însemnătate tehnică deosebită prin utilizarea lor la realizarea termorezistențelor sensibile (termistori), deoarece prin variația procentajului între componenții respectivi variază, între limite largi, conductibilitatea electrică, deci implicit și rezistența lor electrică.

fiind legați de tipul purtătorilor de sarcină, electronic sau lacunar, reprezentat prin indicii n și p .

Relația (1) exprimă modul de variație al mobilității în funcție de temperatură dacă este cunoscută mărimea $\alpha_{n,p}$. Sub această formă ea poate fi utilizată pentru obținerea unor informații calitative despre proprietățile semiconductorilor. În cele ce urmează se fac unele considerații despre un mod de a determina valoarea mărimii $\alpha_{n,p}$ pentru intervalul de temperaturi și semiconductorii menționați.

Este știut că dacă într-un semiconductor cu nivele donoare se introduc impurități acceptoare atunci va avea loc o compensare, deci numărul purtătorilor de sarcină de impuritate din semiconductor se va micșora. Un proces analog va avea loc și la introducerea impurităților donoare într-un semiconductor cu conducție lacunară. Astfel, deși în semiconductor pot să existe în același timp nivele donoare sau acceptoare, totuși predomină unul dintre aceste tipuri. De aceea se poate considera că conductibilitatea de impurități are predominant un caracter electronic (de tip n) sau lacunar (de tip p).

Pentru intervalul de temperaturi menționat vom neglija conductibilitatea intrinsecă, considerînd numai conductibilitatea de impurități. Astfel conductivitatea σ este dată de expresia

$$\sigma = q\Gamma_{n,p}\mu_{n,p} \quad (2)$$

în care q reprezintă sarcina electronului, iar $\Gamma_{n,p}$ și $\mu_{n,p}$ reprezintă concentrația și mobilitatea purtătorilor de sarcină, indicii n și p fiind utilizați respectiv pentru tipul electronic sau lacunar al conductibilității.

Expresia generală care determină numărul purtătorilor de sarcină $\Gamma_{n,p}$ într-un semiconductor cu impurități este destul de complexă. În cazul de față, deoarece se neglijează conductibilitatea intrinsecă iar concentrația ionilor de impurități $N_{n,p}$ este mare în comparație cu concentrația sarcinilor libere, în intervalul de temperaturi considerat pentru care se poate admite că energia de activare a impurităților satisface inegalitatea $\Delta E_{n,p} > kT$, este valabilă relația [2]:

$$\Gamma_{n,p} = \sqrt{N_{n,p} \frac{2(2\pi m_{n,p} kT)^{3/2}}{h^3}} e^{-\frac{\Delta E_{n,p}}{2kT}} \quad (3)$$

în care $m_{n,p}$ — masa efectivă a purtătorilor de sarcină, h — constanta lui Planck, k — constanta lui Boltzmann, T — temperatura absolută și este satisfăcută inegalitatea $\Gamma_{n,p} \ll N_{n,p}$. Utilizarea indicilor n și p este cea convenită anterior.

Relația (3) poate fi scrisă sub forma:

$$\Gamma_{n,p} = b_{n,p} T^{3/4} e^{-\frac{\Delta E_{n,p}}{2kT}} \quad (3a)$$

unde $b_{n,p}$ este o constantă. Ținând seama că rezistivitatea este inversul conductivității $\rho = \frac{1}{\sigma}$, din relațiile (1), (2) și (3a) se deduce că :

$$\rho = A_{n,p} T^{\alpha_{n,p} - \frac{3}{4}} e^{-\frac{\Delta E_{n,p}}{2kT}} \quad (4)$$

unde $A_{n,p} = (q a_{n,p} b_{n,p})^{-1}$ este o constantă față de temperatură și depinde de tipul electronic sau lacunar al conductibilității semiconductorului. Expresia (4) dă posibilitatea de a determina experimental valoarea coeficientului $\alpha_{n,p}$.

Să considerăm întâi cazul când energia de activare a impurităților $\Delta E_{n,p}$ nu depinde de temperatură. Atunci se poate introduce o constantă

$$B_{n,p} = \frac{\Delta E_{n,p}}{2k} \quad (5)$$

și notînd

$$\alpha_{n,p} = b_{n,p} + \frac{3}{4} \quad (6)$$

se obține :

$$\rho = A_{n,p} T^{b_{n,p}} e^{\frac{B_{n,p}}{T}} \quad (7)$$

Din relația (6) observăm că dacă am determina experimental printr-o anumită metodă valoarea mărimii $b_{n,p}$, obținem ușor valoarea mărimii $\alpha_{n,p}$, ceea ce conform cu relația (3) permite aflarea modului de variație al mobilității în funcție de temperatură. Pentru simplificarea scrierii în continuare vom omite uneori indicii.

Mărima coeficientului $b_{n,p}$ se poate determina ușor experimental, măsurînd printr-o anumită metodă, de exemplu prin metoda sondelor [3], valoarea rezistivității eșantionului semiconductor pentru trei temperaturi T_0 , T_1 și T_2 din intervalul considerat.

Într-adevăr, fie :

$$\rho_{T_0} = A T_0^b e^{\frac{B}{T_0}}$$

$$\rho_{T_1} = A T_1^b e^{\frac{B}{T_1}}$$

$$\rho_{T_2} = A T_2^b e^{\frac{B}{T_2}}$$

Împărțind membru cu membru ultimele două relații la prima, logaritmînd și introducînd notațiile :

$$\begin{aligned} \ln \rho_{T_1} - \ln \rho_{T_0} &= \Delta_1 \ln T_1 - \ln T_0 = \Delta_1 \ln T \quad \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} = \Delta_1 \left(\frac{1}{T} \right) \\ &\quad ; \\ \ln \rho_{T_2} - \ln \rho_{T_0} &= \Delta_2 \ln T_2 - \ln T_0 = \Delta_2 \ln T \quad \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0} = \Delta_2 \left(\frac{1}{T} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

se obține :

$$b\Delta_1 \ln T + B\Delta_1 \left(\frac{1}{T}\right) = \Delta_1 \ln \rho_T$$

$$b\Delta_2 \ln T + B\Delta_2 \left(\frac{1}{T}\right) = \Delta_2 \ln \rho_T$$

Rezolvând acest sistem obținem :

$$b = \frac{\Delta_1 \ln \rho_T \cdot \Delta_2 \left(\frac{1}{T}\right) - \Delta_2 \ln \rho_T \cdot \Delta_1 \left(\frac{1}{T}\right)}{\Delta_1 \ln T \cdot \Delta_2 \left(\frac{1}{T}\right) - \Delta_2 \ln T \cdot \Delta_1 \left(\frac{1}{T}\right)} \quad (9)$$

și

$$B = \frac{\Delta_2 \ln \rho_T \cdot \Delta_1 \ln T - \Delta_1 \ln \rho_T \cdot \Delta_2 \ln T}{\Delta_1 \ln T \cdot \Delta_2 \left(\frac{1}{T}\right) - \Delta_2 \ln T \cdot \Delta_1 \left(\frac{1}{T}\right)} \quad (10)$$

Se observă deci că măsurind valoarea rezistivității semiconductorului pentru trei temperaturi putem determina conform cu relația (9) valoarea lui b . În același timp rezolvarea sistemului conduce și la posibilitatea de a determina mărimea B prin aceeași metodă, o dată cu determinarea lui b . Cu alte cuvinte, conform cu relația (5) putem determina totodată și valoarea energiei de activare, adică lărgimea bandei interzise, în cazul când aceasta nu depinde de temperatură.

Să considerăm acum cazul când energia de activare a impurităților depinde de temperatură. Efectul acestei dependențe fiind mic, cel puțin pentru temperaturi nu prea înalte ca acelea considerate în cazul de față, se poate admite o dependență liniară a lui $\Delta E_{n,p}$ în funcție de T , adică putem exprima :

$$\Delta E_{n,p} = \Delta E_{n,p}^{(0)} - 2\beta_{n,p} kT \quad (11)$$

unde k — constanta lui Boltzmann, iar $\beta_{n,p}$ — un coeficient adimensional cu valori mici, care determină dependența de temperatură considerată și care vom considera conform cu raționamentele din [2] că satisface $\beta_{n,p} > 0$.

Trebuie însă menționat că înlocuirea directă a lui $\Delta E_{n,p}$ din relația (11) în formula (7) nu este corectă. Conform cu teoria generală [4] în acest caz este necesar ca în factorii statistici exponențiali să se treacă de la $\Delta E_{n,p}$ la mărimea

$$\Delta E_{n,p} - T \int_0^T \frac{1}{T} \frac{\partial E_{n,p}}{\partial T} dT \quad (12)$$

ceea ce conduce deci la necesitatea de a înlocui în formula (4) expresia :

$$\Delta E_{n,p}^{(0)} - 2\beta_{n,p} kT + 2\beta_{n,p} kT \ln T \quad (13)$$

Ținând seama de acest rezultat și notînd

$$A_{n,p} 1^{-\beta_{n,p}} = A'_{n,p}; \quad \alpha_{n,p} - \beta_{n,p} - \frac{3}{4} = b'_{n,p}; \quad \frac{\Delta E_{n,p}^{(0)}}{2k} = B'_{n,p}$$

expresia rezistivității devine :

$$\rho = A'_{n,p} T^{b'_{n,p}} e^{\frac{B'_{n,p}}{T}}$$

adică o relație de același tip ca și în primul caz considerat. Rezultă că și procedeul pentru determinarea valorilor $b'_{n,p}$ și $B'_{n,p}$ rămîne valabil. În felul acesta vom putea afla valoarea $\Delta E_{n,p}^{(0)} = 2kB'_{n,p}$. În privința mărimii $b'_{n,p}$ rezultatele nu mai sînt, ca în cazul anterior, satisfăcătoare, deoarece măsurînd experimental mărimea $b'_{n,p}$ se pot trage concluzii (evident în limita preciziei de lucru și a presupunerilor făcute) numai asupra mărimii

$$\alpha_{n,p} - \beta_{n,p} = b'_{n,p} + \frac{3}{4} \quad (14)$$

Relația (14) arată că numai determinarea mărimii $b'_{n,p}$ nu oferă posibilitatea de a trage concluzii despre valoarea mărimilor $\alpha_{n,p}$ sau $\beta_{n,p}$ în parte, ci numai despre valoarea mărimii $\alpha_{n,p} - \beta_{n,p}$.

Mărimea $\beta_{n,p}$ pentru tipul dat de impurități necesită o determinare experimentală aparte, calculul ei teoretic conducînd la dificultăți serioase. Dacă printr-o anumită metodă căpătăm însă indicații asupra mărimii $\beta_{n,p}$ putem trage concluzii, pe baza celor de mai sus, asupra mărimii $\alpha_{n,p}$. Evident este valabil și procedeul invers, adică căpătînd informații asupra mărimii $\alpha_{n,p}$ putem trage concluzii asupra mărimii $\beta_{n,p}$.

Un astfel de mod de a determina valoarea coeficientului $b_{n,p}$ care permite aflarea dependenței mobilității purtătorilor de sarcină de temperatură, trebuie menționat că este valabil numai pentru un eșantion semiconductor omogen (eventual o porțiune omogenă a eșantionului).

BIBLIOGRAFIE

1. G. Busch, U. Vinkler: *Opredelenie harakteristiceskih parametrov poluprovodnikov* Izd. IL, Moskva, 1959.
2. W. Shockley: *Electrons and holes in semiconductors*, New York, 1950.
3. *Spețialnii praktikum po poluprovodnikam i poluprovodnikovim priboram*, Gosenergoizdat, Moskva, 1962.
4. V. L. Bonci-Bruevici: *JTF*, 21, 853, 1951.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ТЕМПЕРАТУРОЙ И ПОДВИЖНОСТЬЮ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе даются некоторые рассуждения об одном из средств определения экспериментальной зависимости от температуры, подвижности носителей заряда в полупроводниковых соединениях, выражая зависимости между температурой и удельным сопротивлением для полупроводниковых образцов.

SUR LA DÉTERMINATION DE LA DÉPENDANCE ENTRE LA TEMPÉRATURE ET LA MOBILITÉ DES PORTANTS DE CHARGE EN SEMICONDUCTEURS

R É S U M É

On fait quelques considerations sur une possibilité de déterminer experimentelment la dépendance entre la température et la mobilité des portants de charge dans des composés avec propriétés semiconducteurs, en utilisant la dépendance entre la résistance spécifique des échantillons semiconducteurs et la température.

CONTRIBUȚIE LA STUDIUL ABERAȚIEI DE SFERICITATE A DIOPTRULUI SFERIC^{*)}

G. G. BRĂTESCU

Introducere

Cercetînd cărțile de specialitate și de învățămînt de Optică Geometrică, am constatat că la tratarea subiectului privind aberația de sfericitate prezentată de o lentilă convergentă se afirmă că razele marginale sînt mai mult abătute către axa optică decît cele paraxiale, ducînd la apariția aberației de sfericitate, fără altă argumentare suplimentară. Natural că o experiență demonstrativă sau un calcul optic riguros, care se dezvoltă în mod special în acest sens, va dovedi și demonstra acest fenomen optic.

În cazul unei lentile convergente în lumina paralelă, Bianu¹⁾ demonstrează, cu ajutorul formulei prismelor subțiri, inegalitatea distanțelor focale marginale și paraxial, fără a stabili însă și relația cantitativă a raportului valorilor acestor distanțe.

Pentru cazul general al refracției unei raze oarecare pe un dioptru sferic Boutaric și Barchewitz²⁾ cît și Kerber³⁾ (în special pentru aberația de sfericitate) stabilesc niște relații mai complicate care nu pun în evidență — imediat — comportarea dioptrului sferic la aberația de sfericitate.

Negăsind în literatura de specialitate o lucrare asemănătoare, am căutat să demonstrez atît calitativ cît și cantitativ unde se situează focarele marginale față de cel paraxial în cazul special al fascicolului de raze paralele cu axa optică și care cade pe un dioptru sferic, utilizînd calculul trigonometric. Am obținut o relație simplă [9] care dovedește ușor aceste fapte. În plus, ca o generalizare, am dedus și o relație nouă [13] cu caracter de invariant.

^{*)} Comunicată la „Conferința științifică a cadrelor didactice — Facultatea de Matematică și Fizică — Universitatea București — 5-6 Mai 1962” la data de 6 mai 1962.

Deducerea relațiilor

Fie dioptrul sferic S cu centrul în C de rază r , vârful V , mărginit de mediile optice cu indicii de refracție n și n' , $n' > n$. Raza marginală IM

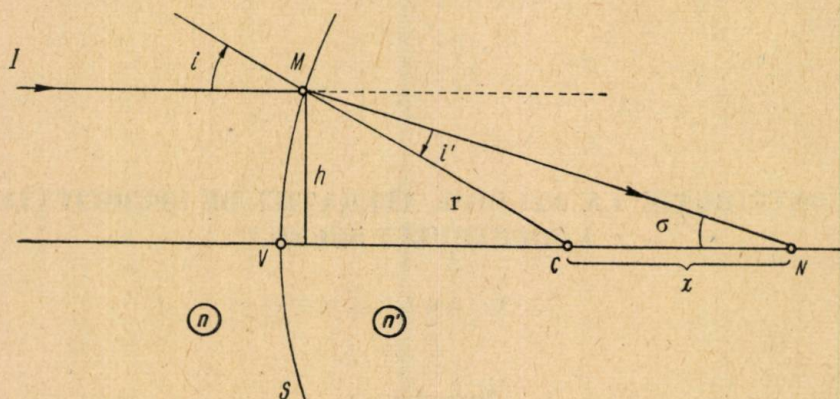


Fig. 1.

atinge dioptrul sferic în punctul M la distanța $h = r \sin i$ de axa optică și se refractă după MN , intersectând axa optică în punctul N .

Vom avea :

$$n \sin i = n' \sin i' \quad [1]$$

Să notăm cu x distanța CN .

Vom avea în triunghiul MCN , unde $\sigma = i - i'$:

$$\frac{x}{\sin i'} = \frac{r}{\sin \sigma} = \frac{r}{\sin (i - i')} \quad [2]$$

de unde

$$x = r \frac{\sin i'}{\sin (i - i')} \quad [3]$$

În cazul razelor paraxiale, $h = 0$, vom avea :

$$\sin i \approx i \text{ și } \sin i' \approx i' \quad [4]$$

deci

$$ni \approx n'i' \quad [5]$$

și relația [3] devine :

$$x_p = r \frac{i'}{i - i'} = r \frac{i'}{\frac{n'i'}{n} - i'} = r \frac{n}{n' - n} \quad [6]$$

Relația [6] ne dă valoarea lui x_p , adică depărtarea focarului paraxial față de centrul C al dioptrului. $x_p + r$ este distanța dintre vârful V al dioptrului și focarul paraxial.

Vom putea calcula din [3] și [6] valoarea raportului $\frac{x}{x_p}$ astfel :

$$\begin{aligned} \frac{x}{x_p} &= \frac{\sin i'}{\sin(i-i')} \frac{n'-n}{n} = \frac{\sin i'}{\sin(i-i')} \left(\frac{n'}{n} - 1 \right) = \frac{\sin i'}{\sin(i-i')} \left(\frac{\sin i}{\sin i'} - 1 \right) = \\ &= \frac{\sin i'}{\sin(i-i')} \frac{\sin i - \sin i'}{\sin i'} = \frac{\sin i - \sin i'}{\sin(i-i')} = \frac{\sin i - \sin i'}{\sin 2 \left(\frac{i-i'}{2} \right)} = \\ &= \frac{2 \cos \left(\frac{i+i'}{2} \right) \sin \left(\frac{i-i'}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{i-i'}{2} \right) \cos \left(\frac{i-i'}{2} \right)} = \frac{\cos \left(\frac{i+i'}{2} \right)}{\cos \left(\frac{i-i'}{2} \right)} = A \end{aligned} \quad [7]$$

Pentru valorile lui h luate de la zero la valoarea maximă $h = r$, în cazul razelor paralele la axa optică, unghiul de incidență este $i \leq \frac{\pi}{2}$ și, deoarece $n < n'$, avem de asemenea $i > i'$, urmează că totdeauna unghiul

$$\frac{i+i'}{2} < \frac{\pi}{2} \quad [8]$$

și deci :

$$A = \frac{x}{x_p} = \frac{\cos \left(\frac{i+i'}{2} \right)}{\cos \left(\frac{i-i'}{2} \right)} < 1 \quad [9]$$

Expresia [9] arată imediat și clar că focarele marginale se vor găsi situate între focarul paraxial și centrul C al dioptrului S : adică $x \leq x_p$.

Din valorile lui x_p și x , date de relațiile [6] și [9], putem obține valorile frontifocalelor, distanțele focarului paraxial și focarelor marginale față de vârful V al dioptrului, și care sînt egale cu :

$$x_p + r \quad \text{și} \quad x + r \quad [10]$$

valori care vor fi întrebuintate apoi la reprezentarea grafică a aberației de sfericitate în funcție de valorile lui h .

În felul acesta relațiile [9] și [10] servesc și la calculul aberației de sfericitate.

Utilizând relația generală [9], putem calcula valorile lui $x_1, x_2, \dots$ pentru înălțimile $h_1, h_2, \dots$

adică :

$$\frac{x_1}{x_p} = \frac{\cos\left(\frac{i_1 + i'_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i_1 - i'_1}{2}\right)}; \quad \frac{x_2}{x_p} = \frac{\cos\left(\frac{i_2 + i'_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i_2 - i'_2}{2}\right)}; \dots \quad [11]$$

Calculînd apoi raporturile $\frac{x_1}{x_2}, \dots$ se capătă expresiile de forma :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\cos\left(\frac{i_1 + i'_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i_1 - i'_1}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{i_2 - i'_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i_2 + i'_2}{2}\right)}; \dots \quad [12]$$

din care se obțin produsele constante :

$$x_1 \frac{\cos\left(\frac{i_1 - i'_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i_1 + i'_1}{2}\right)} = x_2 \frac{\cos\left(\frac{i_2 - i'_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i_2 + i'_2}{2}\right)} = \dots = B \quad [13]$$

unde constanta B are valoarea

$$B = x_p = r \frac{n}{n' - n} \quad [14]$$

care se obține atunci cînd unghiul i , deci și i' , tinde către zero, cînd valoarea raportului

$$\frac{\cos\left(\frac{i - i'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i + i'}{2}\right)} = 1$$

care face ca x să devină $x = x_p = ct = r \frac{n}{n' - n}$.

În cazul cînd raza iese dintr-un dioptru ca în fig. 2 se obțin aceleași relații. Trebuie însă de observat că în acest caz deoarece $n > n'$, deci $i' > i$, valoarea maximă posibilă a lui i' este $\frac{\pi}{2}$, cînd raza emergentă iese tangentă la suprafața dioptrului și care corespunde la valoarea maximă (pentru emergență) a lui i la

$$i = i' \quad [15]$$

unde l este unghiul limită dat de $\sin l = n'/n$. Urmează că totdeauna $i < \frac{\pi}{2}$ și deci și suma $\frac{i' + i}{2} < \frac{\pi}{2}$ [8], deci se va obține de asemenea expresia :

$$A = \frac{x}{x_p} = \frac{\cos\left(\frac{i' + i}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i' - i}{2}\right)} < 1 \quad [9']$$

absolut identică cu [9] deoarece $\cos\left(\frac{i - i'}{2}\right) = \cos\left(\frac{i' - i}{2}\right)$.

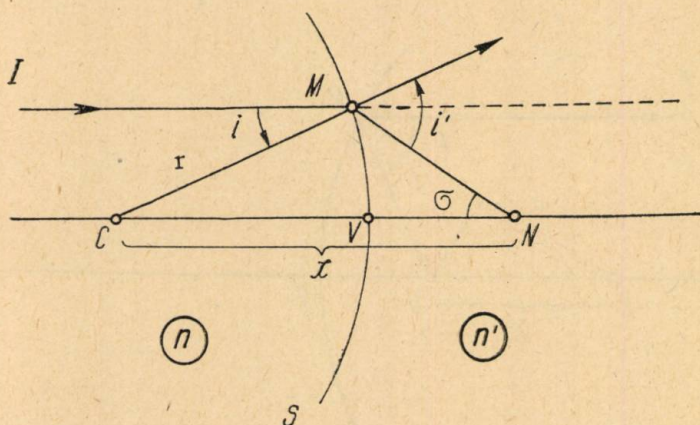


Fig. 2.

Cazul reflexiei pe suprafețele sferice

La reflexia pe o suprafață sferică trebuie avut în vedere că unghiurile i și i' sînt egale și de semne contrare (fig. 3) și cum la reflexie se ia convențional $n = -n'$, pentru a se aplica și în acest caz invariantul $n \sin i = n' \sin i'$ [1], vom avea în relația generală [9] :

$$|i| = |i'| \quad [16]$$

$$|n| = |n'| \quad [17]$$

și deci :

$$A = \frac{x}{x_p} = \frac{\cos\left[\frac{i + (-i')}{2}\right]}{\cos\left[\frac{i - (-i')}{2}\right]} = \frac{1}{\cos i} > 1 \quad [18]$$

și

$$-x_p = r \frac{n}{n' - n} = -\frac{r}{2} \quad [19]$$

adică tocmai relația cunoscută de la reflexia razelor paralele pe o oglindă sferică :

$$x \cos i = x_p = \frac{r}{2} \quad [20]$$

sau în general :

$$x_1 \cos i_1 = x_2 \cos i_2 = \dots = x_p = \frac{r}{2} = B' \quad [21]$$

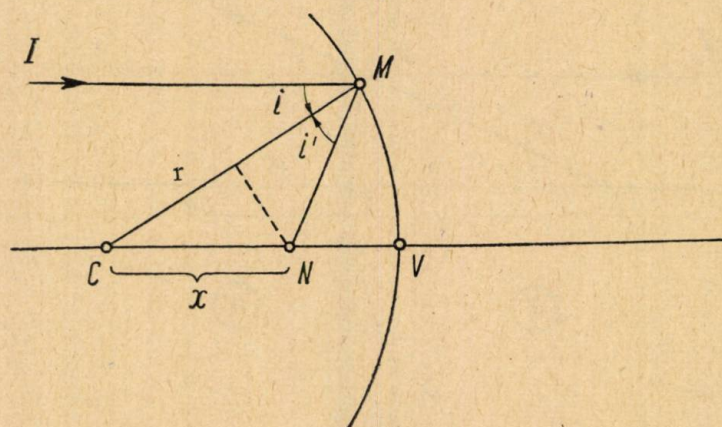


Fig. 3.

BIBLIOGRAFIE

1. BIANU V. V.: „Fizica Generală — Optica Geometrică“, București 1957, Ed. Militară a MFA ale R.P.R., pp. 216—217.
2. BOUTARIC A.-P. BARCHWITZ: „Precis de Physique d'après les théories modernes“, Paris, 1960, Ed. G. Doin et Cie, pp. 389—340.
3. A se vedea demonstrația în: Henri Chrétien: „Calcul des Combinaisons Optiques“, Paris 1958, ediția a 4-a, pp. 290—291.

ВКЛАД В ИЗУЧЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ АБЕРРАЦИИ СФЕРИЧЕСКОГО ДИОПТРА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В случае параллельных оптической оси, обозначая через x и x_p расстояния краевого ($h = h$) и параксиального ($h = 0$) фокусов до центра C сферического диоптра S , имея радиус r и коэффициенты преломления n и n' , рис. 1 и 2, получаются равенства [1]... [9].

Для различных значений h ($h_1, h_2, \dots$) получаются равенства [11] и [12] из которых выводится инвариант данных отношениями [13] и [14].

Делаются приложения и проверки в отображении на сферическое зеркало (рис. 3) получая отношения [16], ... [22].

CONTRIBUTIONS A L'ÉTUDE DE L'ABERRATION DE SPHÉRICITÉ DU DIOPTRE SPHÉRIQUE

R É S U M É

Dans le cas des rayons parallèles à l'axe optique, notant avec x et x_p les distances du foyer marginal ($h = h$) et du foyer paraxial ($h = 0$) envers le centre C du dioptre sphérique S au rayon r et aux indices de réfraction n et n' , fig. 1 et 2, on obtient les relations (1), ... (9).

Pour les différentes valeurs de h ($h_1, h_2, \dots$) on obtient les relations (11) et (12) d'où il en résulte l'invariant donné par les relations (13) et (14).

On fait une application et une vérification à la réflexion sur le miroir sphérique (fig. 3) en obtenant les relations (16), ... (21).

ASUPRA STĂRII TENSIONALE ÎN FOCARUL CUTREMURULUI DIN 13 DECEMBRIE 1957 (IRAN)

G. PETRESCU și G. PURCARU

Unul dintre cele mai puternice cutremure care au avut loc în Iran, în ultimii ani, a fost acela din anul 1957 decembrie 13, $H = 01^h 45^m 00^s$, $1 \pm 0^s, 6$.

Cutremurul s-a produs în zona masivului muntos cuprinsă între Hamadan și Kermashah [1].

$$\begin{aligned}\varphi &= 34^{\circ}36'53'' \text{ N } \pm 0^{\circ}0'47'', \\ \lambda &= 47^{\circ}48'43'' \text{ E } \pm 0^{\circ}0'52'', \\ h &= 7 \text{ km } \pm 5,3.\end{aligned}$$

Replicile, de intensitate slabă, care au succedat acest cutremur au durat pînă la 21 ianuarie 1958.

Pentru șocul principal, stația Pasadena din California dă magnitudinea $M = 7,25$.

*

*

*

În nota de față ne vom ocupa de studiul tensiunilor care au acționat în focar, spre a obține astfel, informații suplimentare asupra naturii forțelor care au acționat în acest focar tectonic.

Mecanismul de producere a cutremurului de la 13 decembrie 1957, a fost studiat de F. Peronaci [2] prin metoda Byerly-Hodgson, folosind semnele primelor deplasări în unda P pentru 65 stații.

Analiza soluției prezentată de Peronaci arată că rezolvarea dată nu respectă criteriul de ortogonalitate

$$4 RR' \cos \theta = 1, \quad (1)$$

unde :

R și R' sînt razele celor două cercuri nodale a și respectiv b, iar θ este unghiul dintre ele.

De aceea, noi am revenit asupra soluției, trasînd cele 2 plane nodale conform relației (1).

Soluția obținută este prezentată în fig. 1 și în tabela 1.

Tabela 1

	Planul nodal (a)	Vectorul de mișcare	Planul nodal (b)	Vectorul de mișcare	Planul de acțiune	Tensiunile de compri- mare P	Tensiunile de dilatate T	Vectorul nul Axa tens.inter- mediare B
Direcția	N36° E	N79° E	N10° V	N54° V	N59° E	S67° E	N30° V	S31° V
Direcția înclinării	S54° E		S80° V		N31° E			
Înclinarea (ϵ°)	74°	67°	23°	16°	74°	30°	60°	16°
Unghiul de alunecare (β°)		73°		48°				
Componenta în direcție ($\cos \beta^\circ$)		0,292		0,669				
Componenta în înclinare ($\sin \beta^\circ$)		0,956		0,743				
Sensul mișcării		dextral		sinistral				
Natura mișcării		alunecare în înclinare		alunecare în înclinare				
Tipul faliei		falie inversă		falie inversă				
Tipul cutremurului		P(R)		P(L)				

P — cutremur prin presiune orizontală (compresional)

Se știe că există două concepții asupra sursei echivalentă proceselor care au loc în focarul real al unui cutremur tectonic :

1. Sistemul de forțe care acționează în focar este reprezentat printr-o forță dublă cu moment (nucleu I).

2. Sistemul de forțe care acționează în focar este reprezentat prin două forțe duble fără moment egale în valoare, ortogonale și invers orientate (nucleu II).

În concepția reprezentării focarului real prin nucleu II este posibil a studia și starea de tensiuni în focar.

Adoptînd această concepție, am determinat planul de acțiune, tensiunile de comprimare și de dilatare și axa tensiunilor intermediare.

Tensiunile generatoare ale unui cutremur sînt presupuse a bisecta cele 2 plane nodale a și b.

Tensiunile de comprimare P au acționat în direcția SE—NV, formînd un unghi de 30° față de orizont, iar tensiunile de dilatare T, au acționat în direcția NV—SE, înclinate față de orizont cu un unghi de 60°.

Se observă că, componenta orizontală a tensiunilor de comprimare este mai mare decît cea a tensiunilor de dilatare, raportul lor fiind $\frac{P}{T} \cong \sqrt{3}$.

Tensiunile intermediare au fost determinate ținînd seama că axa lor coincide cu vectorul nul (axa B).

Atragem atenția că, dacă direcțiile celor două axe coincid, semnificația lor tectonofizică este diferită : vectorul nul (axa nulă) este o direcție

(direcția nulă) în spațiu, unic determinată, de-a lungul căreia nu au loc mișcări în timpul cutremurului și fiind un element principal în definirea „comportării” planelor de falie, în timp ce tensiunile intermediare reprezintă acționind în focar.

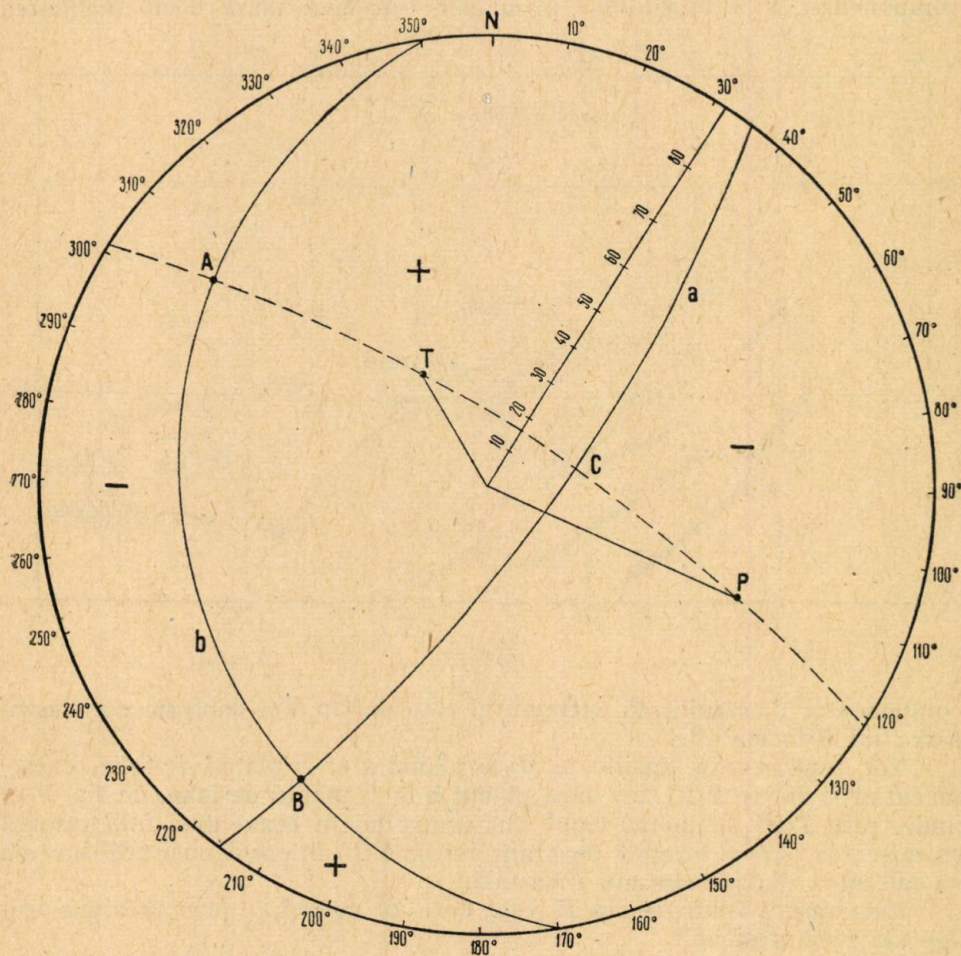


Fig. 1.

Vectorul nul este înclinat cu 16° față de orizont, în direcția S — SV.

În fig. 2, sînt reprezentate tensiunile principale P și T care au acționat în focar, în raport cu direcția generală a zonei în care s-a produs cutremurul.

Tensiunile principale au tendința de a fi paralele cu catenele muntoase.

Planul în care acționează tensiunile principale și în care are loc mișcarea de ruptură, polul lui fiind vectorul nul al lui Hodgson, este numit planul de acțiune al lui Ritsema.

Cum acest plan este mai mult sau mai puțin vertical, iar înclinarea componente T a tensiunilor principale este mai mare decât înclinarea

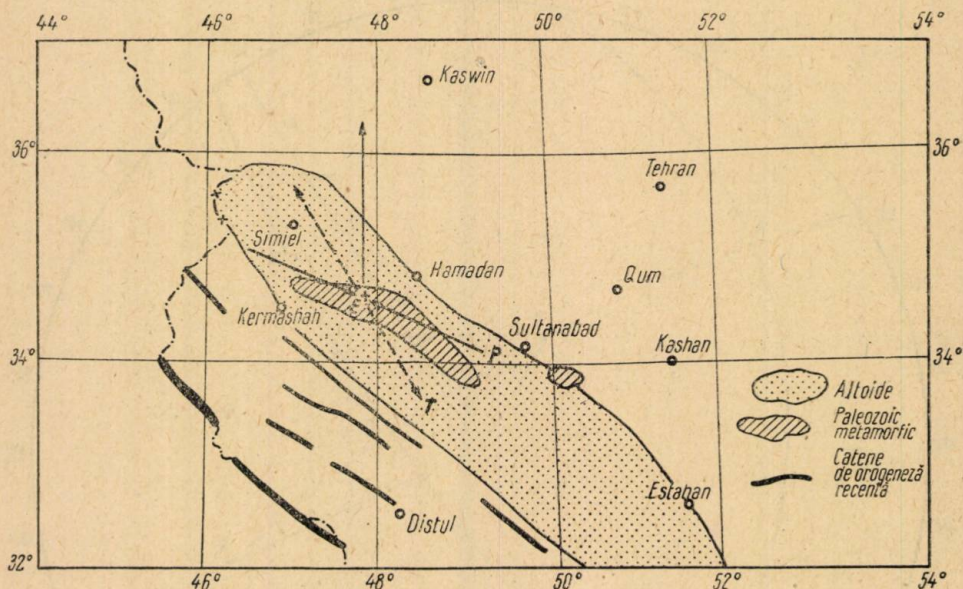


Fig. 2.

componentei P , rezultă că cutremurul este de tip V_p , conform cu clasificarea lui Ritsema [3].

Tot după aceeași clasificare, dacă planul a ar fi planul de falie, cutremurul ar fi de tip $P(R)$, iar dacă planul b ar fi planul de falie, de tip $P(L)$ unde, prin $P(R)$ s-a notat tipul cutremurului, în cazul unei falii inversă cu mișcarea parțial laterală dextrală, iar cu $P(L)$ în cazul unei falii inversă cu mișcarea parțial laterală sinistrală.

Cutremurul fiind de tip P , este deci un cutremur prin presiune orizontală (compresional).

Studiul mai multor cutremure din această regiune vor completa rezultatele asupra deplasărilor tectonice de care cutremurele sînt legate genetic, mai ales că în ultimii ani Iranul a fost „teatrul” unor puternice cutremure.

BIBLIOGRAFIE

1. F. Peronaci: Sismicità dell'Iran, „Annali di Geofisica”, 1958 vol. XI, nr. 1 pag. 55—68.
2. Idem: Natura fisica della scossa all'ipocentro del terremoto dell'Iran dell'13 dicembre 1957 — „Rendiconti”, 1958 — vol. V, pag. 68—75.
3. A. R. Ritsema: Earthquake — generating stress systems in Southeast Asia, „B.S.S.A.”, 1957 — vol. 47. nr. 3., pag. 267—279.

К ВОПРОСУ О СОСТОЯНИИ НАПРЯЖЕНИЯ В ФОКУСЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ ПРОИСШЕДШЕМ 13 ДЕКАБРЯ 1957 ГОДА В ИРАНЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

На основе уточнения плана трещины ф. Пероначем (которая была в начале ортогонализированной) установлены исходные напряжения землетрясения.

Компрессионные напряжения P действовали в направлении $SE - NV$ более или менее горизонтально. Напряжения расширения T , действовали в направлении $NV - SE$ более или менее вертикально.

Землетрясение типа V_p (согласно Ритсему), т. к. оно произошло вследствие горизонтального давления (компрессиональное землетрясение типа P).

SUR L'ÉTAT DES TENSIONS AU FOYER DU SÉISME DU 13 DÉCEMBRE 1957 (IRAN)

RÉSUMÉ

La solution du plan de faille, obtenue par F. Peronaci (et qui fut d'abord orthogonalisée) aide à établir les tensions génératrices du séisme.

Les tensions de compression P ont agi en direction Sud-Est — Nord-Ouest, plus ou moins horizontalement et les tensions de dilatation T , en direction Nord-Ouest — Sud-Est, plus ou moins verticalement.

Le séisme est de type V_p (selon Ritsema), c'est-à-dire produit par pression horizontale (séisme compressionnel de type P).

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION
PUBLISHED WEEKLY
CHICAGO, ILL., U.S.A.

VOLUMUL CUTREMURELOR INTERMEDIARE DIN VRANCEA

G. PETRESCU, C. RADU și G. PURCARU

Principală regiune seismică din țara noastră este regiunea cotului Carpaților, cunoscută sub numele de Vrancea și cuprinzând cutremure intermediare a căror adâncimi variază între 100 și 200 km, densitatea cea mai mare a focarelor fiind la 150 km.

Cutremurele intermediare din Vrancea, după cum arată imaginea distribuției focarelor [1], reprezintă o zonă ușor curbată, care urmează direcția tangentei la curbura bruscă a Carpaților.

Mai spre est de această zonă urmează zona cutremurelor cu focare situate la adâncimea $h < 60$ km.

Trecerea de la cutremurele cu $h \geq 100$ km la cele cu $h < 100$ km are un caracter aproape aseismic [1].

Prin caracteristicile lor, cutremurele din Vrancea au fost studiate de diferiți cercetători, din anumite puncte de vedere.

În lucrarea de față, ne vom ocupa de problema evaluării volumului cutremurelor cu $60 \leq h \leq 200$ km din regiunea Vrancea.

Prin volumul unui cutremur se înțelege un domeniu spațial în care sînt acumulate tensiunile elastice pînă la limita lor maximă, nedepășind limita superioară a rezistenței materialului din domeniul considerat.

Totodată este admis că în interiorul volumului unui cutremur, materialul este deformat, în medie uniform, în orice direcție pînă la producerea cutremurului, cînd energia va fi eliberată printr-un mecanism sau altul [2]. Se admite deci că ipoteza deformării uniforme în interiorul volumului nu este absolut adevărată, însă esențial este faptul că deformarea nu va diferi decît foarte puțin într-o direcție față de alta. Dar aceasta, după același autor, nu este decît prima aproximație în formularea ipotezei.

Pentru calculul volumului unui cutremur, C. Tsuboi a presupus că energia unui cutremur este dată de relația :

$$E = \frac{1}{2} \epsilon x^2 V \quad (1)$$

unde :

- E — energia undelor seismice
- V — volumul cutremurului
- x — tensiunea elastică maximă (critică)
- c — constanta de elasticitate a materialului

Determinarea volumului unui cutremur pe această cale este de natură energetică și se reduce, în esență, la calculul razei unei sfere centrată în focar (sfera deformațiilor elastice).

În aceeași direcție, K. E. Bullen [3] a determinat volumul unui cutremur folosind relația :

$$V = 12q\mu \frac{E}{S^2} \quad (2)$$

unde :

qE — energia tensiunilor elastice în regiunea focală, exact înaintea producerii cutremurului.

V — volumul cutremurului.

μ — rigiditatea constantă în întreg volumul.

S — rezistența R. Mises, (o discuție detaliată asupra rezistenței Mises este dată în [4]).

Factorul 12 din relația (2) a fost pus în legătură cu prima formulă a relației magnitudine — energie a lui Gutenberg și Richter :

$$\log E = 12 + 1,8 M \quad (3)$$

Folosind relația (2) Bullen a calculat mărimea V pentru cazul unui cutremur extrem ($M = 8,6$) căruia îi corespunde energia

$$E = 3 \cdot 10^{27} \text{ erg} \quad (4)$$

Luînd $\mu = 4 \cdot 10^{11} \text{ dyne/cm}^2$, $q = 2$, $S = 10^9 \text{ dyne/cm}^2$ și, folosind relațiile (2) și (4), Bullen a obținut pentru volumul celui mai mare cutremur posibil valoarea

$$V = 10^{21} \text{ cm}^3 \quad (5)$$

Valoarea $S = 10^9 \text{ dyne/cm}^2$ a fost dată de Jeffreys [4], după experimentele de laborator pentru materialele din scoarță.

Totuși, valoarea dată de (5) s-a considerat a fi apreciabil mai mare decît dacă s-ar folosi relația

$$\log E = 11 + 1,6 M \quad (6)$$

care pentru $M = 8,6$ dă :

$$E = 6 \cdot 10^{24} \text{ erg} \quad (7)$$

iar pentru V , valoarea

$$V = 6 \cdot 10^{19} \text{ cm}^3 \quad (8)$$

Valoarea dată de (8) este, aproximativ, cu două ordine mai mică decît cea dată de (5) și îi corespunde o sferă focală, cu raza de 25 km. După Bullen, această mărime a fost admisă pentru a fi raza volumului unui cutremur extrem.

Folosind relația, [5]

$$\log E = 11,8 + 1,5 M \quad (9)$$

pentru $M = 8,6$, obținem $E = 5 \cdot 10^{24} \text{ erg}$, ceea ce corespunde unui volum de ordinul 10^{19} cm^3 pentru un cutremur extrem.

Pentru cel mai puternic cutremur din țara noastră acel de la 10 noiembrie 1940, care a avut $M = 7,4$, relația (3) dă

$$E = 2 \cdot 10^{28} \text{ erg} \quad (11)$$

iar relația (9) ne conduce la valoarea

$$E = 8 \cdot 10^{22} \text{ erg}$$

Introducând aceste valori în (2) și ținând seama că $h = 133 \text{ km}$ obținem, respectiv,

$$V = 1,28 \cdot 10^{20} \text{ cm}^3 \quad (13)$$

$$V = 5,10 \cdot 10^{17} \text{ cm}^3 \quad (14)$$

Se vede că diferența dintre cele 2 valori este de aproape 3 ordine, și ținând seama de cele de mai sus, V dat de (14) va fi considerat volumul celui mai puternic cutremur din țara noastră.

Într-o altă variantă, Benioff [5] a dat, în 1961, o relație care s-a folosit pentru determinarea volumului cutremurelor, exprimând legătura dintre energia cutremurului și tensiunile elastice prin expresia :

$$E = p\mu \left(\epsilon_{ij}^2 + \frac{2}{3} \theta^2 \right) V = \frac{1}{2} p\mu x^2 V$$

sau notînd :

$$C = \left(\frac{1}{2} p\mu V \right)^{1/2}$$

obținem o altă relație, echivalentă cu (15)

$$E^{1/2} = Cx, \quad (15)$$

folosită în graficele Benioff.

Notațiile utilizate mai sus sînt :

- E — energia undelor seismice,
- x — tensiunea elastică (maximă),
- μ — modulul deplasării,
- V — volumul cutremurului,
- q — partea din energia potențială elastică, care trece în energie seismică.

Egalînd (2) și (15) obținem :

$$\frac{1}{12} S^2 q^{-1} \mu^{-1} V = \frac{1}{2} p\mu x^2 V$$

de unde :

$$S^2 = 6p\mu^2 x^2, \text{ și deoarece, } q = \frac{1}{p}, \text{ rezultă}$$

$$S = \sqrt{6}\mu x \quad (16)$$

Cunoscînd pe S și μ din (16), se poate determina tensiunea elastică pentru un cutremur dat.

Folosind relația (2) pentru condițiile cutremurelor din Vrancea (între mediere) am încercat să determinăm cantitativ mărimile volumelor.

În acest scop, am folosit toate cutremurele din Vrancea, cu adâncimea $60 \text{ km} \leq h \leq 200 \text{ km}$ avînd $M \geq 5$ și pentru care h a fost determinat [1, 6].

Rezultatele calculului sînt rezumate în tabela 1 care cuprinde: data producerii cutremurului, ora la origine H , coordonatele epicentrului (φ° , λ°), adîncimea focarului h , magnitudinea M , energia E , μ , V și logaritmul zecimal al lui V .

Valorile lui E au fost determinate cu ajutorul relației (9).

Valorile lui μ au fost obținute cu ajutorul graficelor rapoartelor $\frac{k}{\rho}$ și $\frac{\mu}{\rho}$ date de Bullen pentru zona B (33 — 400 km) a Pămîntului. Mărimea V a fost calculată cu ajutorul relației (2), unde s-a luat $S = 1,6 \cdot 10^9 \text{ dyne/cm}^2$.

Valoarea S folosită pentru cutremurele din Vrancea a fost luată după Jeffreys și este valabilă pentru cutremurele din sistemul muntos alpin — himalaian, din care fac parte și Carpații.

Cu ajutorul valorilor V obținute pentru cele 29 cutremure din Vrancea, s-a încercat stabilirea unei dependențe, volum — magnitudine, $V = f(M)$ de forma:

$$V = 10^{aM+b}$$

unde V este volumul cutremurului în cm^3 , M magnitudinea, a și b , constante care se vor determina prin m.c.m.p. se înlocuiește cu: Metoda celor mai mici pătrate aplicată pentru cele 29 ecuații, ne-a condus la următorul sistem de ecuații normale:

$$919,79 a + 162,46 b = 2453,31,$$

$$162,46 a + 29 b = 435,33,$$

S-au obținut valorile:

$$a = 1,505,$$

$$b = 6,582,$$

iar relația (16) devine:

$$V = 10^{1,505 M + 6,582} \quad (17)$$

sau

$$\log V = 1,505 M + 6,582 \quad (18)$$

Relația (18) sau (17) este valabilă pentru cutremurele din Vrancea pentru $5,0 \leq M \leq 7,5$ și $60 \leq h \leq 200 \text{ km}$.

Valorile lui V , obținute cu relația (18), sînt în bună concordanță cu valorile lui V , corespunzătoare, obținute cu (2).

Tabela 1

Nr. crt.	Data	H			φ_N°	λ_E°	h Km.	M	E erg.	μ dyne/cm ²	V cm ³	log ₁₀ V
		h.	m.	s.								
1	1908 X 6	21	39,8		45,5	26,5	150	6,75	$8,52 \cdot 10^{21}$	$7 \cdot 10^{11}$	$5,59 \cdot 10^{16}$	16,75
2	1912 V 25	18	01,7		45,8	27,3	100	6,0	$6,30 \cdot 10^{20}$	$6,5 \cdot 10^{11}$	$3,84 \cdot 10^{15}$	15,58
3	1929 XI 1	06	57	14	45,9	26,6	198	5,75	$2,66 \cdot 10^{20}$	$7,3 \cdot 10^{11}$	$1,82 \cdot 10^{15}$	15,26
4	1934 II 2	19	59	16	45,7	26,1	150	5,25	$4,71 \cdot 10^{19}$	$7,0 \cdot 10^{11}$	$3,09 \cdot 10^{14}$	14,49
5	III 29	20	06	51	45,8	26,5	150	6,25	$1,52 \cdot 10^{21}$	„	$9,98 \cdot 10^{15}$	16,00
6	1935 VII 13	00	03	46	45,7	26,7	150	5,25	$4,71 \cdot 10^{19}$	„	$3,09 \cdot 10^{14}$	14,49
7	IX 5	06			45,8	26,7	150	5,19	$3,85 \cdot 10^{19}$	„	$2,53 \cdot 10^{14}$	14,40
8	1938 VII 13	20	15	17	45,7	26,8	163	5,25	$4,71 \cdot 10^{19}$	„	$3,09 \cdot 10^{14}$	14,49
9	1939 IX 5	06	02	02	45,8	26,5	150	5,25	$4,71 \cdot 10^{19}$	„	$3,09 \cdot 10^{14}$	14,49
10	1940 VI 24	09	57	24	45,9	26,6	115	5,5	$1,10 \cdot 10^{20}$	$6,6 \cdot 10^{11}$	$6,81 \cdot 10^{14}$	14,83
11	X 22	06	37	00	45,8	26,4	122	6,5	$3,60 \cdot 10^{21}$	$6,7 \cdot 10^{11}$	$2,26 \cdot 10^{16}$	16,35
12	XI 8	12	00	44	45,5	26,2	115	5,5	$1,10 \cdot 10^{20}$	$6,6 \cdot 10^{11}$	$6,81 \cdot 10^{14}$	14,83
13	XI 10	01	39	09	45,8	26,7	133	7,4	$8,00 \cdot 10^{22}$	$6,8 \cdot 10^{11}$	$5,10 \cdot 10^{17}$	17,71
14	XI 11	06	31	16	46,0	26,8	150	5,5	$1,10 \cdot 10^{20}$	$7,0 \cdot 10^{11}$	$7,22 \cdot 10^{14}$	14,86
15	XI 19	20	27	12	46,0	26,5	150	5,25	$4,71 \cdot 10^{19}$	„	$3,09 \cdot 10^{14}$	14,49
16	1943 IV 28	19	46	40	45,8	27,2	66	5,0	$2,00 \cdot 10^{19}$	$6,2 \cdot 10^{11}$	$1,16 \cdot 10^{14}$	14,06
17	1945 III 12	20	51		45,7	26,8	150	5,52	$1,20 \cdot 10^{20}$	$7,0 \cdot 10^{11}$	$7,88 \cdot 10^{14}$	14,90
18	IX 7	15	48	22	45,3	26,5	110	6,5	$3,60 \cdot 10^{21}$	$6,6 \cdot 10^{11}$	$2,23 \cdot 10^{16}$	16,35
19	XII 9	06	08	45	45,3	26,4	100	6,0	$6,30 \cdot 10^{20}$	$6,5 \cdot 10^{11}$	$3,84 \cdot 10^{15}$	15,58
20	1946 XI 3	18	47	01	45,8	26,6	150	5,5	$1,10 \cdot 10^{20}$	$7,0 \cdot 10^{11}$	$7,22 \cdot 10^{14}$	14,86
21	1948 III 13	21	06		45,9	26,7	150	5,19	$3,85 \cdot 10^{19}$	„	$2,53 \cdot 10^{14}$	14,40
22	IV 29	00	34		45,9	26,7	150	5,01	$2,09 \cdot 10^{19}$	„	$1,37 \cdot 10^{14}$	14,14
23	1948 V 29	04	48	55	45,9	26,7	150	5,75	$2,66 \cdot 10^{20}$	$7 \cdot 10^{11}$	$1,75 \cdot 10^{15}$	15,24
24	1950 I 16	04	25		45,7	26,6	150	5,31	$5,82 \cdot 10^{19}$	„	$3,82 \cdot 10^{14}$	14,58
25	VI 20	01	18		45,9	26,5	170	5,53	$1,25 \cdot 10^{20}$	$7,1 \cdot 10^{11}$	$8,32 \cdot 10^{14}$	14,92
26	1951 III 18	11	32		45,8	26,6	150	5,01	$2,09 \cdot 10^{19}$	$7,0 \cdot 10^{11}$	$1,37 \cdot 10^{14}$	14,14
27	1952 VIII 3	16	36	15	45,6	26,5	100	5,20	$3,98 \cdot 10^{19}$	$6,5 \cdot 10^{11}$	$2,43 \cdot 10^{14}$	14,39
28	1953 V 17	02	33	51	45,4	26,3	122	5,0	$2,00 \cdot 10^{19}$	$6,7 \cdot 10^{11}$	$1,26 \cdot 10^{14}$	14,10
29	1955 V 1	22	52		45,5	26,3	150	5,35	$6,77 \cdot 10^{19}$	$7,0 \cdot 10^{11}$	$4,44 \cdot 10^{14}$	14,65

Este interesant că coeficientul lui M din (18) este același cu al lui M din $\log E = 11,8 + 1,5 M$

Atunci (18) devine

$$\log E = \log V + 5,22 \quad (19)$$

care se mai poate scrie

$$\frac{E}{V} = 10^{5,22} = \text{const.} \quad (20)$$

Recent, C. Radu [7], a dat o relație magnitudine — energie pentru cutremurele intermediare din Vrancea pe baza energiilor E obținute la Lvov și a magnitudinilor M determinate la Stația București din unda S :

$$\log E = 11,08 + 1,66 M \quad (21)$$

În aceeași lucrare [7] s-a arătat că luând ca bază magnitudinile M determinate la stația București, atunci folosirea relațiilor (9) și (21) pentru determinarea lui E ne conduce la valori foarte apropiate.

Adunând (18) cu (21) obținem

$$\log V = 17,66 + 3,16 M - \log E \quad (22)$$

sau

$$E = 10^{17,66+3,16M} V^{-1} \quad (22)$$

Scăzând aceste relații, rezultă:

$$\log E = \log V + 0,16 M + 4,50 \quad (23)$$

sau

$$\frac{E}{V} = 10^{4,50+0,16 M}$$

Egalând ecuațiile (19) și (23), observăm că cea mai bună concordanță se obține, prin folosirea acestor relații, pentru valori ale lui M în vecinătatea lui $M = 6,5$ ceea ce atestă rezultatele obținute în [7].

Pe de altă parte înlocuind (19) în (21) obținem o nouă relație

$$\log V = 1,66 M + 5,86 \quad (24)$$

care este comparabilă cu (18).

Oricare dintre relațiile (18) și (24) vor putea fi folosite pentru Vrancea, pentru determinarea volumului unui cutremur.

Folosind formula (16) putem evalua mărimea mișcării în focar, presupunând că deformația elastică x care se „eliberează” este, în medie, aceeași pentru tot volumul focarului. Luând, în medie, $x = 10^{-4}$, obținem pentru cutremurul de la 10 noiembrie 1940, că mărimea mișcării în focar atinge valoarea de aproximativ 0,50 — 1 m.

*
*
*

Amintim că evaluarea volumului unui cutremur dată mai sus este de natură energetică însă acest lucru poate fi și de altă natură.

Admițînd, într-o primă aproximare, că lungimea λ a undei emise din focar și raza sferei focale coincid vom avea o evaluare după lungimea de undă (λ).

De asemenea evaluarea dimensiunilor focarului se poate face folosind amplitudinile maxime.

Valorile obținute pentru V se folosesc la alcătuirea hărților tectonice pentru a se stabili legătura dintre mărimea zonelor tectonice și rupturile din aceste zone.

Alcătuindu-se hărțile tectonice se poate compara tectonica cu seismicitatea, și prin aceasta se alcătuiesc hărțile seismotectonice.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Petrescu și C. Radu: Seismicitatea și raionarea seismică a teritoriului R.P.R., în intervalul 1900—1958 „Studii și cercetări de astronomie și seismologie” VI, 2, 1961.
2. C. Tsuboi: Earthquake energy, earthquake volume, aftershock area, and strength of the earth's crust, J. of Phys of the Earth, 1956, vol. 4, nr. 2.
3. K. E. Bullen: On the Size of the Strained Region Prior to an Extreme Earthquake, BSSA, 1955, vol. 45, nr. 1.
4. H. Jeffreys: The Earth, 3rd ed. (Cambridge University Press, 1952).
5. M. Bath and H. Benioff: The Aftershock Sequence of the Kamchatka Earthquake of November 4, 1952, BSSA, 1958, vol. 48, nr. 1.
6. G. Petrescu și C. Radu: Seismicitatea teritoriului R.P.R. în perioada 1901—1960 An. St. Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, 1960, t. VI. Fasc. 3 (Supliment).
7. C. Radu: Relația energie — magnitudine pentru cutremurele din Vrancea. An. Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, 1962 t VIII.

ОБЪЕМ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ В РАЙОНЕ ВРАНЧА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе авторы перечисляют методы определения размеров очагов землетрясений.

Имея в виду особенности землетрясений в районе Вранча они определили объем землетрясений для 60 км. $< h < 200$ км. и $M \geq 5,0$.

Для соответствующих землетрясений установилось соотношение зависимости объема от магнитуда с видом $V = 10^{aM} + b$ и получились соотношения (17), (19),

(24). Также получился очень интересный результат, в котором $\frac{E}{V} = \text{постоянная}$.

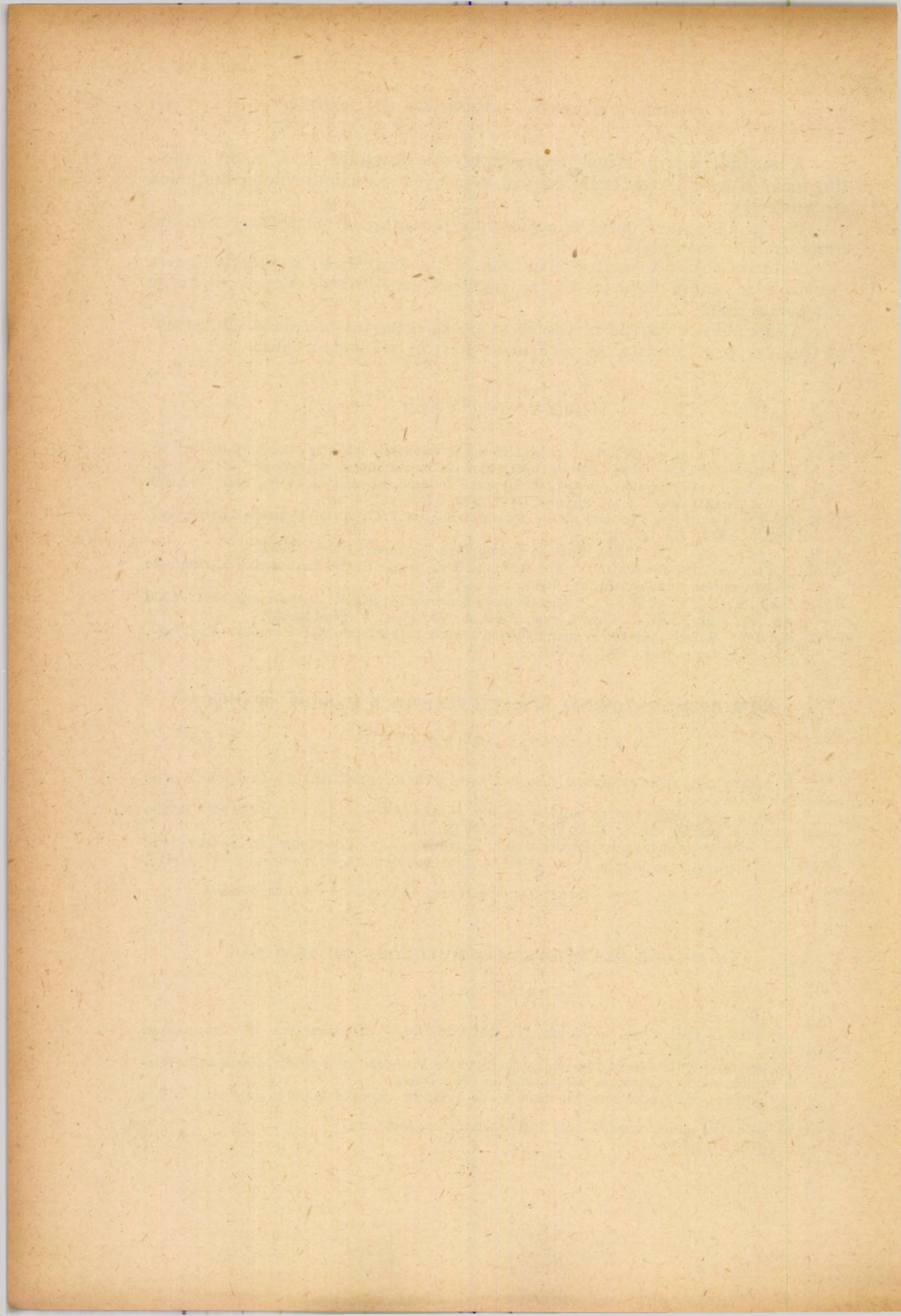
LE VOLUME DES SÉISMES INTERMÉDIAIRES DE VRANCEA

R É S U M É

Les auteurs présentent, au début, les méthodes de la détermination des dimensions d'un foyer séismique.

En tenant compte des particularités du foyer de Vrancea, on a décidé d'utiliser la relation de Bullen pour l'évaluation du volume de ces séismes.

Les auteurs ont étudié tous les séismes de Vrancea ayant $M \geq 5,0$ et sont arrivés à la relation $V = f(M)$ et au résultat très intéressant $\frac{E}{V} = \text{constant}$.



VARIAȚIA CU PRESIUNEA A COEFICIENTULUI DE SCHIMB DE CĂLDURĂ ÎNTRE UN CORP SOLID ÎNCĂLZIT ȘI AER*

A. NICOLAU, N. RĂDULESCU, M. COJOCARU și V. RUXANDRA

1. Problema schimbului de căldură între un corp solid încălzit și aer, pe lângă caracterul ei științific, are și largi aplicații în industria metalurgică în elaborarea tehnologiei prelucrării metalelor cât și în industria chimică în diferite procese tehnologice care se petrec la presiuni joase.

Procesul schimbului de căldură constă în transmiterea unei cantități de căldură gazului înconjurător, de către un corp solid încălzit la o temperatură mai ridicată decât a fluidului.

Acest schimb de căldură este un proces complex avînd loc prin convecție, conductibilitate termică și radiație.

Cantitatea de căldură transmisă poate fi calculată după relația lui Newton :

$$Q = \alpha(t_c - t_g)S \cdot \tau$$

unde t_c reprezintă temperatura corpului solid cald, t_g este temperatura gazului înconjurător, S este suprafața corpului solid, τ este timpul cît durează procesul, iar α coeficientul de schimb de căldură sau de transmisie. Dacă t_c , t_g , S și τ pot fi măsurate cu ușurință, nu același lucru se petrece cu α . Acesta depinde de un număr mare de parametri cum sînt : Φ forma geometrică a corpului, l_1, l_2, l_3 , dimensiunile lui, p presiunea la care se găsește gazul înconjurător, V viteza gazului, λ coeficientul de conductibilitate termică, η vîscozitatea gazului, C_p căldura lui molară la presiune constantă, μ greutatea lui moleculară, t_c temperatura corpului solid cald, t_g temperatura gazului și încă de alți parametri. [1]

$$\alpha = f(\Phi, l_1, l_2, l_3, p, \mu, t_c, t_g, V, \lambda, C_p, \eta, \dots)$$

Acest fapt face ca procesul schimbului de căldură solid-gaz să fie foarte complex, iar determinarea lui α să poată fi făcută numai pentru anumite cazuri particulare în care numărul variabilelor este limitat. [2]

* Lucrare prezentată la Sesiunea Științifică a cadrelor didactice Universitatea București — Facultatea Matematică și Fizică 5—6 mai 1962.

Procesul schimbului de căldură poate fi studiat pe două căi și anume : fie abordând calea teoretică folosind ecuațiile diferențiale ale schimbului de căldură, fie pe calea experienței directe. [3,4]

Din cauza complexității fenomenului schimbului de căldură prin convecție, aplicarea acestor ecuații diferențiale la soluționarea diferitelor probleme, nu se poate face decât cu totul limitat și introducând multe ipoteze simplificatoare care fac ca rezultatul găsit să se îndepărteze de realitate. În etapa actuală de cercetare, experiența este hotărâtoare. Din acest motiv lucrarea de față este o rezolvare pe cale experimentală a unei laturi a problemei și anume : variația cu presiunea a coeficientului de schimb de căldură între un corp solid încălzit și aer.

Scopul lucrării este de a se urmări procesul schimbului de căldură la diferite presiuni, începând cu presiunea atmosferică pînă la presiuni

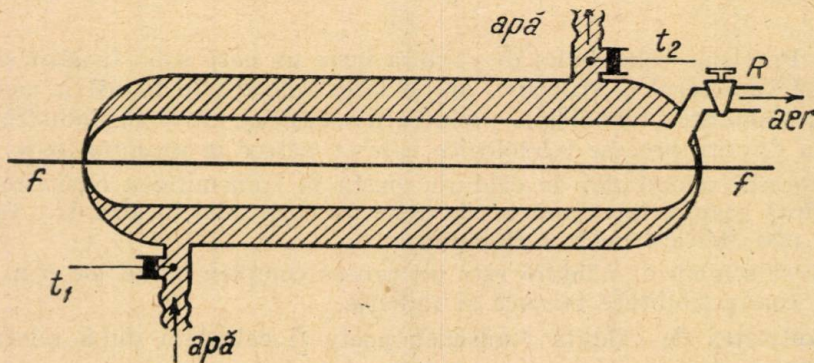


Fig. 1.

joase, adică de a se cerceta modul cum depinde coeficientul de schimb de căldură de presiunea aerului înconjurător.

În cercetările făcute s-au menținut constanți toți parametrii de care depinde α în afară de presiune. În acest caz $\alpha = f(p)$

2. *Descrierea dispozitivului în care are loc schimbul de căldură.* Dispozitivul în care se realizează schimbul de căldură solid-gaz, este format dintr-un tub de sticlă a cărui lungime este de un metru. (fig. 1). Tubul este așezat orizontal. El are un perete dublu care constituie o manta prin care circulă un curent de apă furnizat de un ultratermostat care menține temperatura peretelui interior al tubului constantă cu precizie de $0,1^\circ\text{C}$.

Tubul de sticlă este străbătut axial de un fir de platină ff cu diametrul de $0,5\text{ mm}$ care în acest caz constituie corpul solid cald. Firul poate fi încălzit pînă la o anumită temperatură cu ajutorul unui curent electric convenabil ales. Temperatura peretelui tubului este controlată tot timpul cu ajutorul a două termometre sensibile t_1 și t_2 așezate unul la intrare și celălalt la ieșirea curentului de apă care circulă tot timpul experienței prin mantaua care îmbracă tubul.

Temperatura firului cald este controlată prin măsurarea cu precizie a rezistenței lui electrice.

În acest dispozitiv experimental, firul cald este folosit totodată și ca termometru cu rezistență, după ce printr-o prealabilă etalonare s-a construit curba de variație a rezistenței lui electrice cu temperatura.

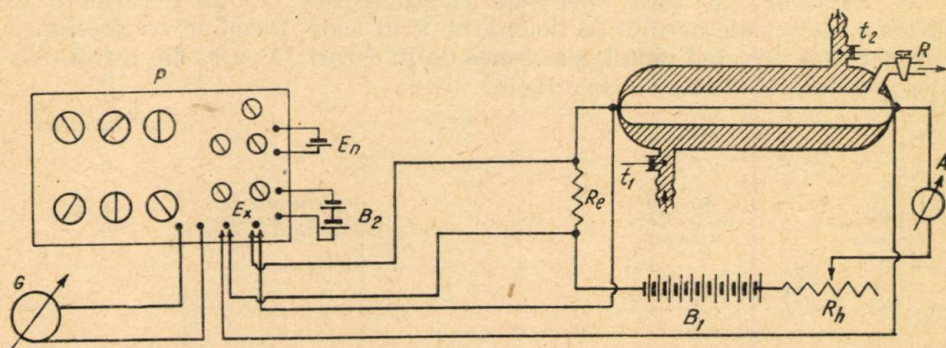


Fig. 2.

B_1 — bateria de acumulatori pentru alimentarea firului cald; R_h — reostat pentru reglarea curentului de încălzire; A — ampermetru pentru citirea valorii aproximative a curentului de încălzire; R_e — rezistența etalon de același ordin de mărime cu a firului cald; G — galvanometru cu spot luminos $S=10^{-10}$ A/mm. m; P — potențiometrul; E_n — Element normal Weston; B_2 — Baterie de lucru pentru potențiometrul.

Dispozitivul experimental este conectat la o instalație de vid cu ajutorul căreia puteau fi realizate presiuni cuprinse între presiunea atmosferică și presiunea de 10^{-5} torr. Presiunile erau măsurate cu ajutorul a două manometre Mac-Leod cu scări diferite.

3. *Schema instalației electrice.* Instalația electrică folosită în lucrare este dată în fig. 2.

4. *Modul de lucru.* Se pornea ultratermostatul care furniza un curent de apă la temperatură constantă, în cazul determinărilor noastre la 25°C .

Temperatura era controlată prin cele două termometre t_1 și t_2 divizate în zecimi de grad.

Se conecta bateria B_1 și un curent de intensitate I străbătea firul de platina ff. Curentul era convenabil ales, așa încît să aibă o valoare corespunzătoare pentru a încălzi firul de platina la temperatura de 65°C . Curentul de încălzire era citit cu aproximație la ampermetrul A și era determinat foarte precis din valoarea căderii de tensiune la bornele rezistenței etalon R_e , măsurată cu ajutorul potențiometrului P .

După un interval de timp se măsoară cu precizie tot potențiometric căderea de tensiune la capetele firului de platina ff; cu ajutorul celor două valori se putea cunoaște cu precizie valoarea rezistenței electrice a firului cald și folosind curba de etalonare se putea cunoaște temperatura acestuia. Se varia din nou intensitatea curentului de încălzire pentru ca temperatura firului intrînd în regim permanent să aibă valoare de 65°C .

În scopul eliminării dependenței de temperatură a coeficientului de schimb de căldură, în tot timpul măsurătorilor care erau făcute în regim permanent se realiza între firul încălzit și perete un gradient de temperatură constant ($\Delta t = 40^\circ\text{C}$) cu o abatere de $0,5^\circ\text{C}$ cu totul neglijabilă în ceea ce privește dependența lui de temperatură.

5. *Rezultate.* În acest mod s-au efectuat peste 30 de experiențe la diferite presiuni ale aerului ce înconjură firul cald, începînd cu presiunea atmosferică și mergînd pînă la presiunea de 10^{-3} torr. O parte din rezultatele experimentale sînt trecute în tabelul nr. 1.

Tabelul nr. 1

P presiunea în torr	I curentul de încălzire în Amperi	I ²	$\Delta t^\circ\text{C}$ diferența de temperatură în- tre fir și perete	$\frac{I^2}{\Delta t} \cdot 10^3$
1	2	3	4	5
$2 \cdot 10^{-3}$	0,1402	0,01965	40,1	0,49
$6 \cdot 10^{-2}$	0,3466	0,1203	39,5	3,01
0,25	0,4828	0,2331	40,5	5,71
1,16	0,7254	0,5262	40,0	13,15
3,6	0,7894	0,6231	39,8	15,65
10,4	0,7904	0,6247	39,8	15,69
22,5	0,7964	0,6342	39,8	15,93
98,0	0,8009	0,6414	40,0	16,03
189,0	0,8129	0,6608	39,7	16,64
478,0	0,9459	0,8947	39,8	22,48
569,0	0,9730	0,9467	40,5	23,37
760,0	0,9946	0,9892	40,0	24,73

6. *Interpretarea rezultatelor și concluzii.* Cu ajutorul acestor valori s-a calculat dependența de presiune a coeficientului de schimb de căldură α .

Din relația lui Newton :

$$\alpha = \frac{Q}{(t_c - t_g) S \cdot \tau} \quad (1)$$

știind că

$$Q = 0,24 \cdot I^2 \cdot R \cdot \tau \quad (2)$$

și notînd $(t_c - t_g)$ cu Δt notație care o introducem în relația (1) se obține :

$$\alpha = \frac{0,24 \cdot I^2 \cdot R}{\Delta t \cdot S} \quad (3)$$

Deoarece suprafața S a firului de platină este în toate experiențele aceleași, iar rezistența electrică R a aceluiași fir are aceeași valoare, pentru că s-a lucrat la aceeași temperatură a firului cald (65°C), rezultă că aceste

mărimi în cazul experiențelor efectuate sînt niște constante și relația (3) poate fi scrisă sub forma :

$$\alpha = K \frac{I^2}{\Delta t} \quad (4)$$

Pentru un calcul mai riguros s-a menținut în relația (4) Δt cu toate că diferențele între diferitele valori ale lui, nu depășesc $0,5^\circ\text{C}$.

După cum aerul înconjurător se afla la presiuni mai mari sau mai mici, tot astfel transmisia căldurii de către firul de platină încălzit era

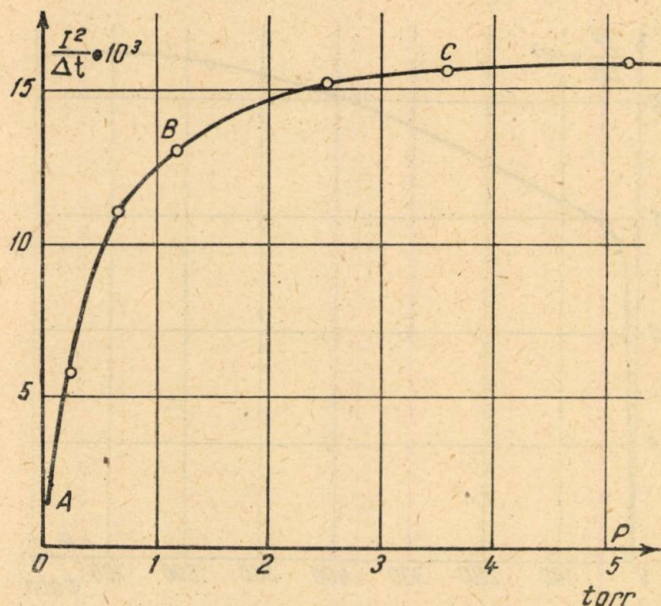


Fig. 3. prezintă la o scară mai mare variația cu presiunea a coeficientului de schimb de căldură în domeniul presiunilor joase.

mai mare sau mai mică, necesitînd pentru a-i menține temperatura constantă un curent electric de încălzire mai intens sau mai puțin intens.

Dependența coeficientului de schimb de căldură α de presiunea aerului înconjurător a fost pusă în evidență din calculul relației $K \frac{I^2}{\Delta t}$ pentru diferite valori ale presiunii.

O parte din aceste valori sînt date în tabelul nr. 1.

Ele au fost reprezentate grafic luîndu-se pe ordonată $\frac{I^2}{\Delta t} 10^3$ iar pe abscisă presiunea aerului ce înconjură firul de platină cald, în torri. Deoarece $K \frac{I^2}{\Delta t} = \alpha$ unde K are valoarea $\frac{0,24}{S}$ în reprezentarea grafică, coeficientul

de schimb de căldură apare înmulțit cu această constantă ceea ce nu modifică alura curbei.

Curba obținută este prezentată în figura 4.

Procesul schimbului de căldură solid-fluid, așa după cum am arătat este un proces complex ce cuprinde transferul de căldură prin conductibilitate termică, convecție și radiație.

Deoarece atât temperatura firului cald cât și a peretelui a fost menținută constantă, efectul radiației poate fi considerat constant. Acesta nu contribuie la schimbarea de alură a curbei reprezentată în fig. 3. și fig. 4.

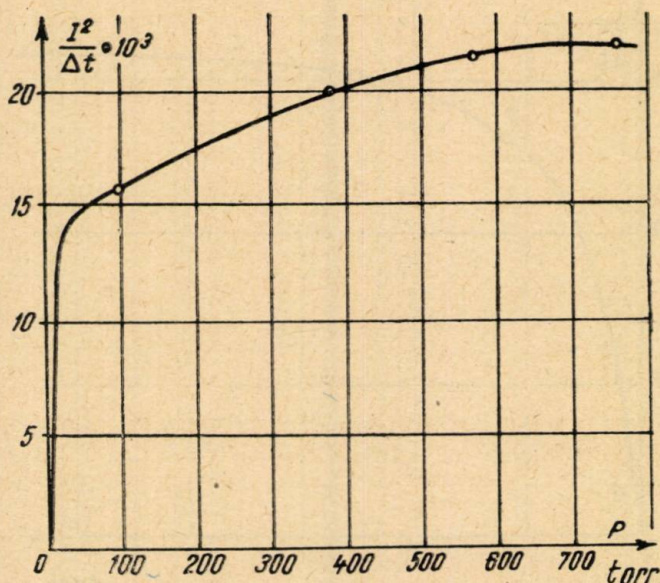


Fig. 4.

Schimbările de alură ale curbei se datoresc convecției și conductibilității termice al căror rol preponderent se schimbă în funcție de presiune.

Astfel porțiunea AB a curbei, care se caracterizează printr-o pantă accentuată și care este cuprinsă între presiunea de $2 \cdot 10^{-3}$ torr și presiunea de 1,16 torr în care coeficientul de schimb de căldură crește apreciabil, poate fi explicată ca fiind datorată efectului cumulat al schimbului de căldură prin conductibilitate termică, convecție și radiație.

Porțiunea BC a curbei, fig. 3 are un mers mai puțin accentuat. Ea este cuprinsă între presiunea de 1,16 torr și presiunea de 3,6 torr. În acest domeniu de presiuni, schimbul de căldură solid-aer se petrece mai puțin intens. Explicația este că efectul conductibilității termice nu mai este atât de puternic ca atunci când presiunea crește în domeniul cuprins sub presiunea de 1,16 torr, unde creșterea coeficientului de conductibilitate termică se face proporțional cu creșterea numărului purtătorilor de căldură adică cu a numărului de molecule de gaz cuprinse în unitatea de volum.

În acest domeniu de presiuni (porțiunea BC a curbei), rolul preponderent îl are schimbul de căldură prin convecție.

Porțiunea curbei (fig. 4) care cuprinde un domeniu larg de presiuni de la presiunea de 3,6 torr pînă la presiunea atmosferică, arată o creștere lentă a coeficientului de schimb de căldură.

Această porțiune a curbei se explică prin faptul că în acest domeniu de presiuni, efectul conductibilității termice rămîne constant, creșterea lentă a coeficientului de schimb de căldură datorindu-se convecției. Se știe că coeficientul de schimb de căldură depinde de presiune numai la presiuni joase, el rămîne constant în cazul aerului așa cum arată cercetările noastre de la presiunea de 3,6 torr pînă la presiunea atmosferică, fapt care concordă cu teoria.

Aceste rezultate, pe lîngă importanța lor științifică pot fi folosite în tehnică, în diferite procese tehnologice în care schimbul de căldură între un corp solid și aerul înconjurător se petrece la diferite presiuni.

Aceeași problemă va fi studiată și într-un gaz cu moleculă ușoară.

BIBLIOGRAFIE

1. М. А. Михеев: *Основы теплопередачи*, Госэнергоиздат, 1947, Москва.
2. А. А. Гухман: *Физические основы теплопередачи*, Госэнергоиздат, 1934.
3. Г. Гребер и С. Эрк: *Основы учения о теплообмене*. ОНТИ, 1936.
4. Г. Гребер: *Введение в теорию теплопередачи*, Гостехиздат, М., 1929.

КОЛЕБАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОБМЕНА ТЕПЛА МЕЖДУ ТВЕРДЫМ НАГРЕТЫМ ТЕЛОМ И ВОЗДУХОМ В СВЯЗИ СО СМЕНОЙ ДАВЛЕНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В данной работе авторы изучали зависимость коэффициента обмена тепла между твердым нагретым телом и воздухом от давления.

Результаты этих исследований, кроме научной важности их, находят применения в технологии обработки металлов в различных химических процессах, происходящих в воздухе при меньшем давлении чем атмосферное.

Явление тепловой смены между твердым телом и газом очень сложно, так как коэффициент тепловой смены зависит от большого числа параметров, его определение не может быть сделано теоретическим путем, кроме частных случаев и с результатами, которые удаляются от действительности.

Авторы дают опытное разрешение зависимости коэффициента смены тепла α от давления, в том случае, когда газ, окружающий твердое теплое тело, является воздухом при различном давлении.

С этой целью был создан опытный прибор, с помощью которого было возможно проводить исследование в области давлений, охваченных между атмосферным давлением и давлением $2 \cdot 10^{-3}$ torr, в работе с градиентом постоянной температуры и в постоянных условиях.

Из графика полученных опытных результатов делаются выводы о механизме этого процесса.

Истолкование результатов показывает, что в случае смены тепла между твердым нагретым телом и воздухом при разных давлениях коэффициент смены тепла α имеет заметный рост в области давления от $2 \cdot 10^{-3}$ torr до 1,16 torr, объясняемый эффектом тепловой проводимости, конвекцией и радиацией.

Проверка кривой $\alpha = f(p)$ показывает, что в области давлений от 1,16 torr до 3,6 torr смена тепла между твердым телом и воздухом происходит менее интенсивно. Объясняется это тем, что в этой области смена тепла при теплопроводности начинает падать; она не происходит пропорционально числу молекул воздуха, находящихся в единице объема, как это имеет место в области низких давлений меньше 1,16 torr. При давлении между 3,6 torr и атмосферном давлении коэффициент смены тепла растёт медленно. Ведущую роль в этой области давлений играет конвекция, полученный результат находится в соответствии с теорией, которая показывает, что коэффициент теплопроводности не зависит от давления, как только при низких давлениях.

LA VARIATION AVEC LA PRESSION DU COEFFICIENT D'ÉCHANGE DE CHALEUR ENTRE UN CORPS SOLIDE CHAUFFÉ ET L'AIR

R É S U M É

Dans le travail ci-dessous, les auteurs ont étudié la dépendance de pression du coefficient d'échange de chaleur entre un corps solide chauffé et l'air.

Les résultats de ces recherches, en dehors de leur importance scientifique, trouvent leurs applications dans la technologie des métaux et dans les différents processus chimiques qui ont lieu en l'air aux pressions plus petites que la pression atmosphérique.

Le phénomène de l'échange de chaleur solide-gaz étant très complexe, puisque le coefficient d'échange de chaleur dépend d'un grand nombre de paramètres, sa détermination ne peut être faite théoriquement qu'en des cas tout particuliers et avec des résultats qui s'écartent de la réalité.

Les auteurs apportent une résolution expérimentale, la dépendance du coefficient d'échange de chaleur en fonction de la pression, au cas où le gaz qui enveloppe le corps solide chaud est l'air même, à différentes pressions.

Un dispositif expérimental a été réalisé à ce but, à l'aide duquel on a pu faire des recherches dans le domaine des pressions comprises entre la pression atmosphérique et la pression de $2 \cdot 10^{-3}$ torr., en opérant avec un gradient de température constant et à régime permanent.

Le graphique des résultats expérimentaux obtenus, permet de tirer des conclusions sur le mécanisme de ce processus.

L'interprétation des résultats indique qu'en cas de l'échange de chaleur entre un corps solide chaud et l'air qui se trouve aux différentes pressions, le coefficient d'échange de chaleur a une croissance accentuée à partir de la pression $2 \cdot 10^{-3}$ torr. jusqu'à 1,16 torr. Ça s'explique par l'effet cumulé de la conductibilité thermique, de la convection et de la radiation.

L'examen de la courbe $\alpha = f(p)$ indique dans le domaine de pressions 1,16 torr. jusqu'à 3,6 torr., que l'échange de chaleur solide-air se fait moins intense. L'explication c'est que dans ce domaine, l'échange de chaleur par conductibilité thermique commence à diminuer; il ne se fait plus proportionnellement au nombre des molécules de gaz trouvées dans l'unité de volume, tel qu'il a lieu dans le domaine des basses pressions, plus petites que 1,16 torr.

Aux pressions comprises entre 3,6 torr et la pression atmosphérique, le coefficient d'échange de chaleur croît lentement, le rôle prépondérant dans ce domaine de pression étant joué par la convection, résultat obtenu en concordance avec la théorie, qui montre que le coefficient de conductibilité thermique ne dépend de la pressions qu'aux basses pressions.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL DESCĂRCĂRILOR ÎN GAZE. POTENȚIALUL DE APRINDERE AL AMESTECURILOR BINARE DE GAZE BIATOMICĂ

A. NICOLAU, M. GEORGESCU, M. CAZAN CORBASCA și ȘT. BUCUR

I. Introducere

În studiul descărcărilor în gaze, problema dependenței potențialului disruptiv de condițiile de experimentare, în gaze mai mult sau mai puțin pure, a constituit un larg subiect de cercetare.

În gazele mono- bi și poliatomice studiate de diverși cercetători, rezultatele nu au fost întotdeauna concordante. Caracterizarea gazelor în descărcarea Townsend prin potențialul minim de aprindere și produsul pd corespunzător minimului (p = presiune, d = distanță între electrozi) rezultate din trasarea curbei Paschen, dau indicații importante asupra stării gazelor, anterioare descărcării luminoase.

Valoriile potențialului de aprindere V_{apr} minim și ale produsului (pd) corespunzătoare minimului, caracteristice gazului studiat, depind de natura gazului și de puritatea lui. S-a constatat că vaporii de apă modifică considerabil valoriile potențialului de aprindere. (1) Acțiunea gazelor adaos, ca și a vaporilor unor substanțe în cantități mici, asupra potențialului de aprindere, se prezintă în mod diferit.

Argonul adăugat în cantități mici în neon coboară potențialul de aprindere mai mult sau mai puțin, după procentajul conținutului în argon.

Influențe asemănătoare exercită vaporii de Hg prezenți în argon sau în neon. (2)

În cazul unui amestec de două gaze, V_{apr} nu poate fi calculat după regula amestecurilor din concentrațiile celor doi componenți.

Un caz semnificativ este cel al amestecului de hidrogen și azot. Pentru anumite concentrații, hidrogenul coboară potențialul de aprindere iar pentru altele îl ridică. (3) Cercetările lui Moraliiov (4) Balog (5) și Glotov (6) sînt edificatoare în cazul amestecurilor de gaze. O influență asupra potențialului de aprindere o manifestă și natura electrozilor (7) precum și existența sau apariția unui strat subțire de acoperire, cu o altă substanță (8).

Se poate spune că, pînă în prezent, nu s-au putut stabili criterii generale de variație ale lui V_{apr} în funcție de concentrația amestecului de gaz.

Experiențe cu alte amestecuri mai sînt necesare pentru elucidarea problemelor de descărcare în gaze precum și pentru fundamentarea unei teorii mai generale, mai unitare. O atare considerație ne-a determinat să efectuăm experiențele cu amestecuri de gaze biatomice.

Un alt aspect al cercetărilor noastre îl prezintă importanța practică în tehnica construcției variatelor instalații de descărcări în gaze.

II. Dispozitivul experimental

1. *Vasul de descărcare* (fig. 1) este alcătuit dintr-un balon de sticlă de diametru $\varnothing = 12$ cm., prevăzut cu o fereastră plană F. La partea superioară a tubului printr-un șlif S_2 se fixează prin înșurubare într-o tijă de alamă, unul dintre electrozi. Șliful S_2 continuă printr-un șlif mai mic S_3 care permite deplasarea micrometrică. (1/100 mm) a tijei solidare cu electrodul superior.

Această deplasare micrometrică, chiar sub vid înaintat, este realizată cu ajutorul unui șurub micrometric, plasat în interiorul tubului și adaptat tijei T.

La partea inferioară a vasului de descărcare se fixează tot prin înșurubare într-o tijă metalică, celălalt electrod.

Apropierea electrozilor se realizează rotind șliful S_3 , iar paralelismul prin centrarea lor anterioară.

Electrozii folosiți au profil Rogowski și au diametrul de 32 mm.

2. Instalația pentru obținerea vidului și măsurarea presiunii.

Instalația este constituită dintr-o pompă de vid preliminar Dewag (P) asociată cu o pompă de difuzie D cu mercur, vid limită $> 10^{-6}$ mm Hg.

Două joje Mac-Leod J_1 și J_2 permit măsurarea presiunilor din canalizare în domeniile ($1,5 \cdot 10^{-1} - 10^{-6}$ mm Hg, respectiv 6 mm $6 \cdot 10^{-4}$ mm Hg); pentru măsurarea presiunilor mai mari decît 6 mm Hg pînă la 20 cm. Hg se folosește un manometru cu mercur M_2 la care diferențele de nivel se citesc

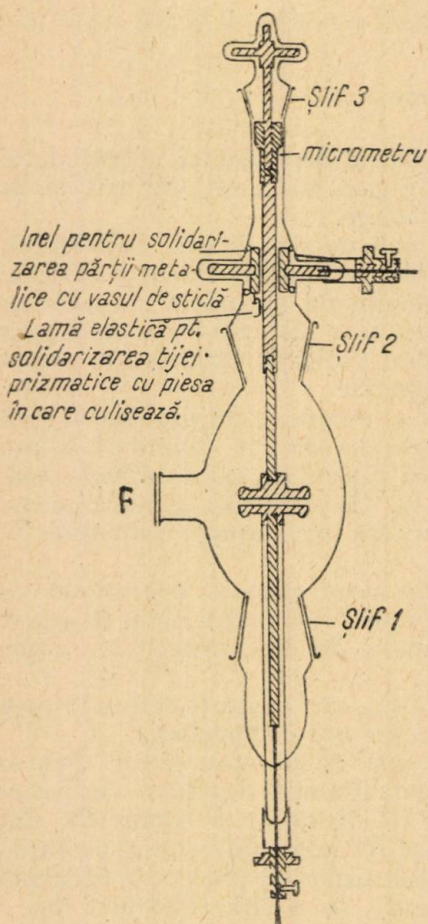


Fig. 1. Vasul de descărcare

cu ajutorul unui catetometru care permite măsurători cu o precizie de 1/10 mm. Canalizarea mai cuprinde un vas de uscare V cu (P_2O_5) și două capcane cu azot lichid, din care, pe figură, este reprezentată numai

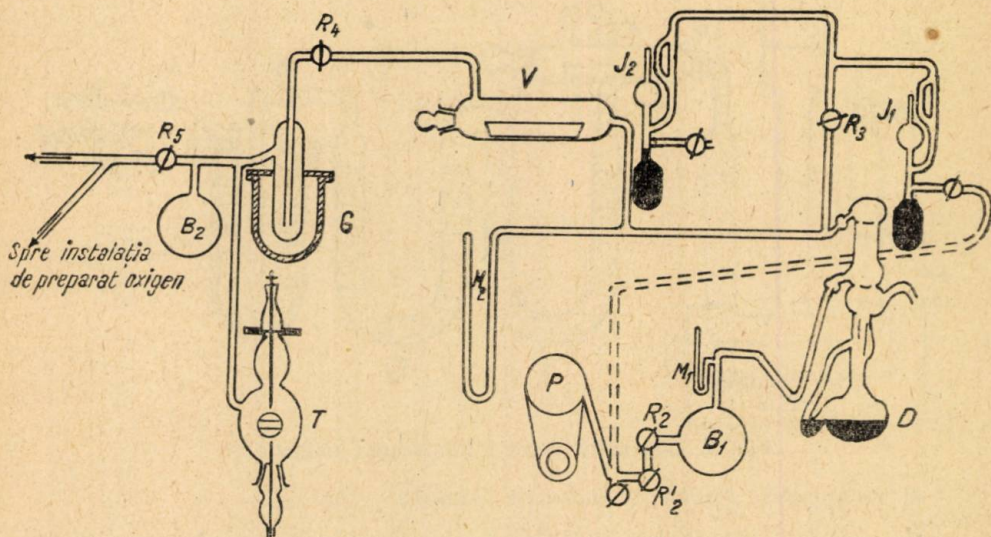


Fig. 2. Instalația de vid care cuprinde și tubul de descărcare T.

una G care corespunde vasului de descărcare. (Acele vase de uscare asigură condiții reproductibile din punct de vedere al gradului de uscare al gazului în care se fac determinările).

Pe canalizare sînt de asemenea conectate două baloane B_1 și B_2 al căror volum total este aproximativ 6 litri; robinetul R_4 împiedică infectarea electrozilor de către mercurul din manometru în timpul în care nu se fac măsurători de presiune, iar robinetul R_5 separă canalizarea de vid, de dispozitivele de preparare ale azotului și oxigenului pur.

3. Dispozitiv pentru prepararea oxigenului. (fig. 3)

Oxigenul necesar determinărilor a fost obținut prin descompunerea electrolică a unei soluții de $Ba(OH)_2 \cdot 8H_2O$ cu concentrația 20%.

Pentru a împiedica difuzia hidrogenului care apare concomitent la celălalt electrod și care ar impurifica oxigenul, s-a introdus un electrod auxiliar legat de electrodul pozitiv printr-o rezistență de 5 K Ω .

Dispozitivul mai conține un vas uscător V cu P_2O_5 , două vase de uscare T_1 și T_2 în formă de U cu Cl_2Ca și o capcană S cu azot lichid.

Robinetul R_4 separă dispozitivul de preparare al oxigenului de acela de preparare al azotului. Înainte de a începe determinările se spală canalizarea de mai multe ori cu oxigen.

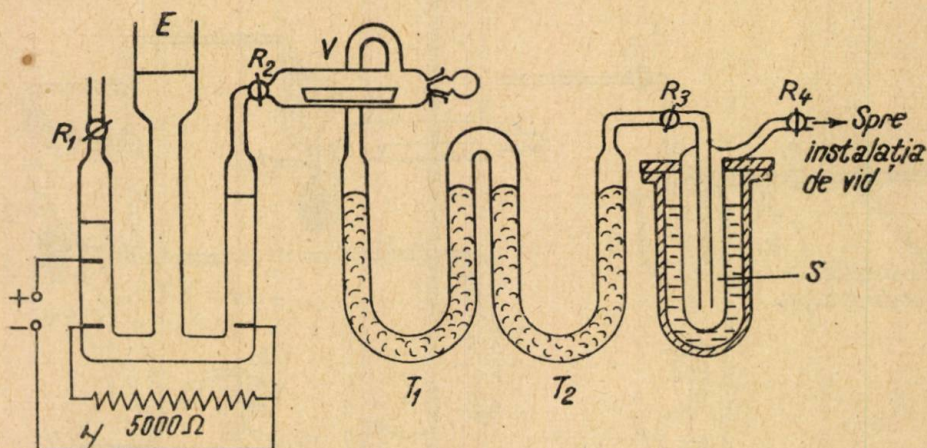


Fig. 3. Dispozitiv pentru prepararea oxigenului

4. Dispozitiv pentru prepararea azotului (fig. 4).

Se compune din balonul A în care se introduce amoniac concentrat (minimum 25% NH_4OH), balonul B în care se introduce apă de brom și balonul N în care are loc reacția dintre amoniac și brom, două vase de uscare V_1 și V_2 cu P_2O_5 și o coloană C de uscare constituită din două vase cu Cl_2Ca care reține vaporii de apă și urmele de amoniac din azotul preparat în vasul N. Pentru punerea în funcțiune a dispozitivului de preparat azot se procedează după cum urmează :

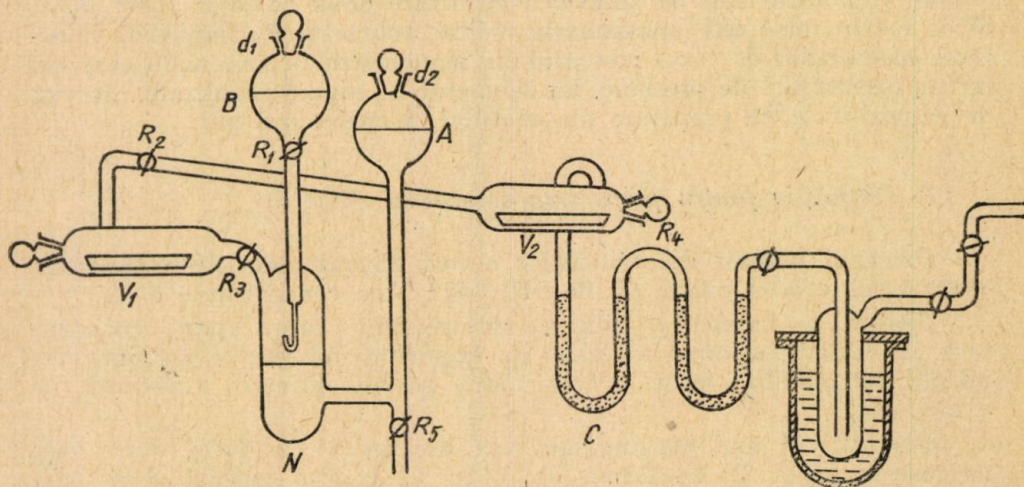
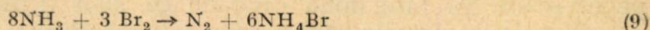


Fig. 4. Dispozitiv pentru prepararea azotului.

Se închid robinetele R_5 și R_3 . Se deschid robinetul R_1 și dopurile rodate d_1 și d_2 . Se toarnă amoniac din vasul A pînă se umple vasul N în întregime. Se închide robinetul R_1 . Se toarnă apă de brom în vasul B. Se închid dopurile d_1 și d_2 . Prin deschiderea robinetului R_1 se trece o mică cantitate de apă de brom în vasul N unde are loc reacția de preparare a azotului. Lichidul din vasul N se ridică încet în vasul A. Pentru a nu avea lichid amoniacal în cantitate mare în vasul A se scoate surplusul prin robinetul R_5 . Se repetă această operație deschizînd de mai multe ori pe R_1 pînă ce avem în N cantitatea de azot necesară. Reacția de preparare a azotului este următoarea :



Azotul astfel obținut este trecut prin vasele de uscare în instalația anterior vidată. Se face această operație „de spălare” a canalizării cu azot de mai multe ori.

5. Montajul electric. (Fig. 5).

Cuprinde o baterie de acumulatori B, putînd furniza un curent maxim de 0,3 A (măsurat cu miliampermetru MA) sub tensiunile de 240 V, 480 V, 720 V, 1120 V; un potențiomtru alcătuit din reostatele Rh_1 de 6000 Ω , Rh_2 de 10 000 Ω și rezistența fixă R de 10 000 Ω ; un galvanometru de masă (G) cu scala bilaterală avînd sensibilitatea de 10^{-7} A/div., care poate fi redusă în trepte cu ajutorul uneia din rezistențele fixe $r_1 = 0,3$ M Ω , $r_2 = 1$ M Ω , $r_3 = 1$ M Ω , $r_4 = 50$ M Ω , $r_5 = 1$ M Ω , $r_6 = 50$ M Ω ; un voltmetru V_1 de clasă 0,5 cu scală de 150 diviziuni, măsurînd tensiuni pînă la 600 V. Cu ajutorul rezistențelor adiționale R_1 și R_2 de cîte 100.000 Ω fiecare, tensiunea poate fi mărită la 900 respectiv 1200 volți.

Montajul mai cuprinde două inversoare J_1 și J_2 precum și întrerupătorul general I_1 .

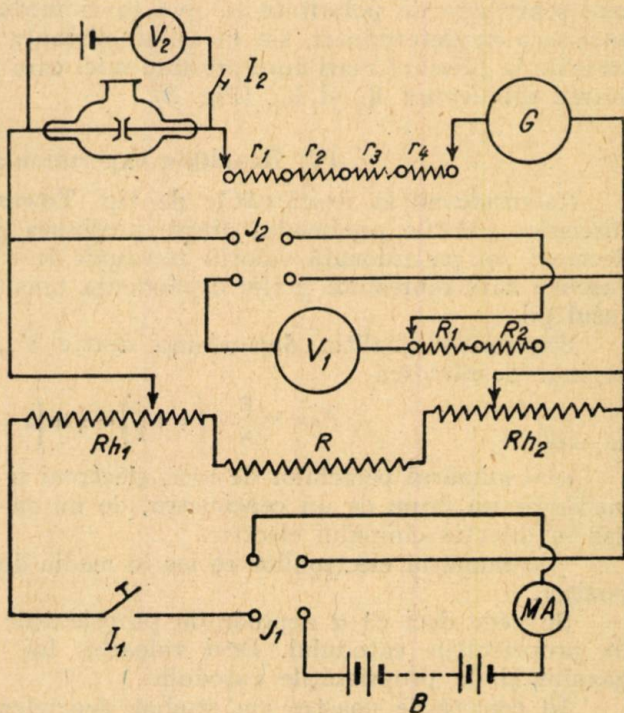


Fig. 5. Montajul electric.

III. Mersul unei experiențe

Se fixează electrozii cu care se lucrează, în vasul de descărcare. Se procedează la vidarea instalației până la obținerea presiunii $p < 10^{-6}$ mm Hg.

După ce se fixează o distanță anumită între electrozi, în vid, se introduce gazul de cercetat din vasul de uscare, în instalație până ce avem o presiune de aproximativ 20 mm Hg.

Gazul introdus în instalație era în prealabil uscat 24 de ore cu P_2O_5 , 4 ore cu $CaCl_2$ și 20 de ore cu $CaCl_2$ și azot lichid.

Înainte de începerea unei serii de determinări gazul era ținut cel puțin o oră pe alte două capcane cu azot lichid.

O serie de determinări, necesare trasării unei curbe, necesită un timp de 3—4 ore de lucru, în care timp gazul de cercetat este menținut sub azot lichid.

Presiunile mai mari de 8 mm Hg se măsoară cu monometrul M_2 iar cele mai mici de 8 mm Hg cu ajutorul joiei J_2 . Se verifică după fiecare determinare dacă presiunea a rămas constantă în timpul acesta. Se aplică tensiunea electrică la vasul de descărcare și se variază cu ajutorul potențiometrului tensiunea de aprindere până ce galvanometrul indică cea mai mică deviere observabilă la maximum de sensibilitate (de aproximativ 1.10^{-7} A/div. Se inversează sensul curentului și se face citirea la voltmetru.

Pentru fixarea unui punct pe curbă se fac câte trei citiri pentru fiecare schimbare de polaritate și apoi se ia media. În general în timpul unei serii de determinări, s-a menținut distanța dintre electrozi fixă. S-a mers de la presiuni mari spre presiuni mici care se realizează prin manevrarea robinetelor R_2 și R'_2 . (Fig. 2).

IV. Rezultate experimentale

Referindu-ne la descărcările de tip Townsend, dacă luăm pe axa absciselor valorile produsului dintre presiunea gazului și distanța dintre electrozi, iar pe ordonată valorile tensiunii de aprindere, se obțin curbele Paschen care reprezintă grafic dependența tensiunii de aprindere de produsul pd.

Exprimînd analitic dependența dintre $V_{apr.}$ și parametri de care depinde descărcarea

$$V_{apr.} = \frac{E}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) = \eta \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)$$

în care :

α = numărul perechilor de ioni, electroni și ioni pozitivi formați în medie pe un drum de un centimetru, de un electron care se mișcă prin gaz în direcția câmpului electric.

γ = numărul electronilor ce ies în medie din catodul lovit de un ion pozitiv.

Se vede deci că α depinde de proprietățile gazului iar γ depinde și de proprietățile catodului. Deci valoarea lui $V_{apr.}$ depinde de natura gazului și de proprietățile catodului.

În cercetările noastre am studiat dependența lui $V_{apr.}$ de valoarea produsului pd la oxigen pur și azot pur, precum și influența pe care o

are natura catodului (sau materialul catodului) lucrînd cu electrozi din metale diferite.

(Fig. 6), (fig. 7) și (fig. 8) arată dependența lui V_{apr} , de produsul pd pentru azot pur în cazul folosirii electrozilor de aluminiu, nichel și aur.

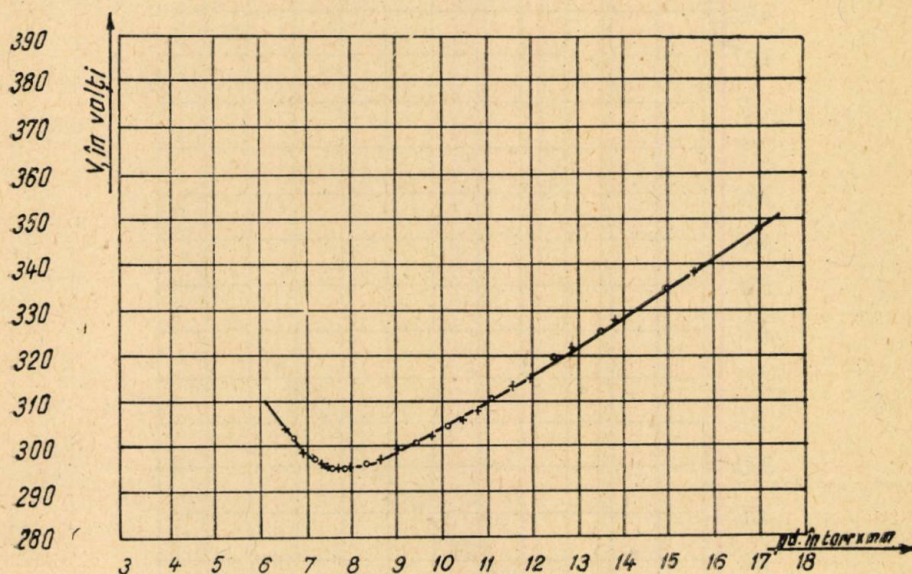


Fig. 6. Dependența lui V_{apr} de produsul pd , pentru azot pur, electrozii folosiți fiind de aluminiu.

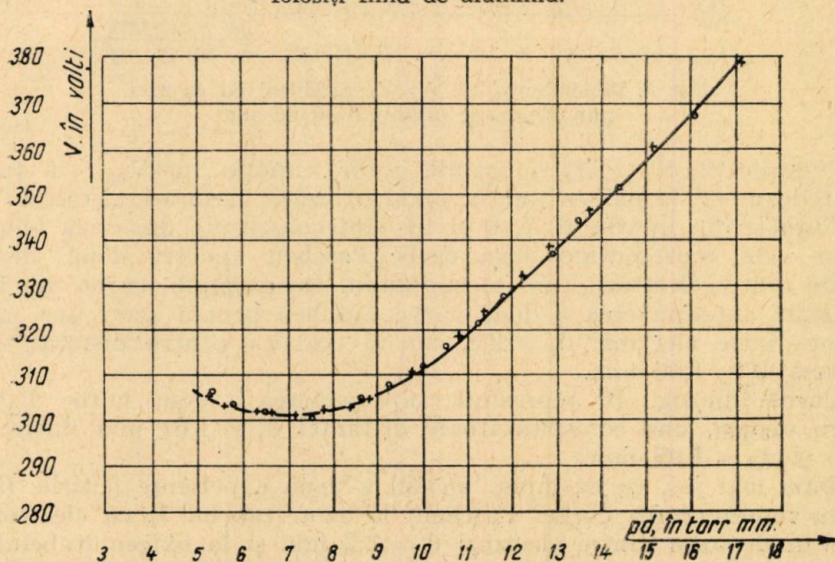


Fig. 7. Dependența lui V_{apr} de produsul pd , pentru azot pur, electrozii folosiți fiind de nichel.

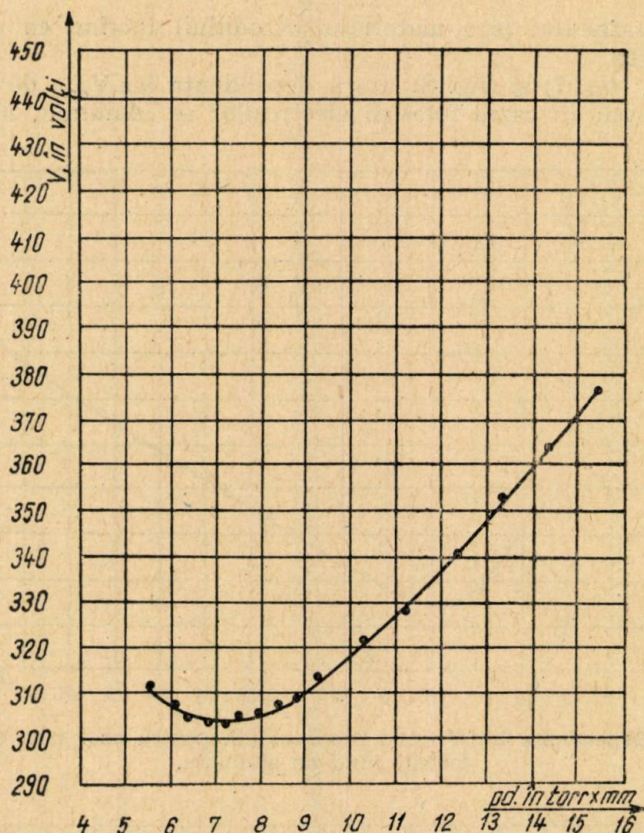


Fig. 8. Dependența lui V_{apr} de produsul pd la azot pur, electrozii folosiți fiind de aur.

Figurile (9, 10 și 11) reprezintă grafic variația lui V_{apr} în funcție de produsul pd la oxigen pur în cazul utilizării aceluiași electrozi.

Curbele din figurile 6, 7, 9 și 10 sînt constituite din două feluri de puncte, ele reprezentînd două curbe Paschen (pentru două distanțe diferite dintre electrozi) care se suprapun. De exemplu, curba din fig. 7 reprezintă suprapunerea a două curbe Paschen pentru azot, una pentru distanța între electrozi $d_1 = 2,2$ mm și cealaltă pentru distanța între electrozi $d_2 = 1,96$ mm.

Curba din fig. 10 reprezintă suprapunerea a două curbe Paschen pentru oxigen, una corespunzătoare distanței $d_1 = 1,61$ mm (între electrozi) și $d_2 = 1,95$ mm.

Dăm mai jos, ca exemplu, mersul a două experiențe (citirile făcute pentru reprezentarea curbei Paschen) la azot (tabelul I) cu electrozi de nichel și distanța dintre electrozi $d = 2,2$ mm și la oxigen (tabelul II) pentru $d = 2,2$ mm avînd electrozi de aur. Tabelul I este corespunzător curbei din figura 7 iar tabelul II, celei din figura 11.

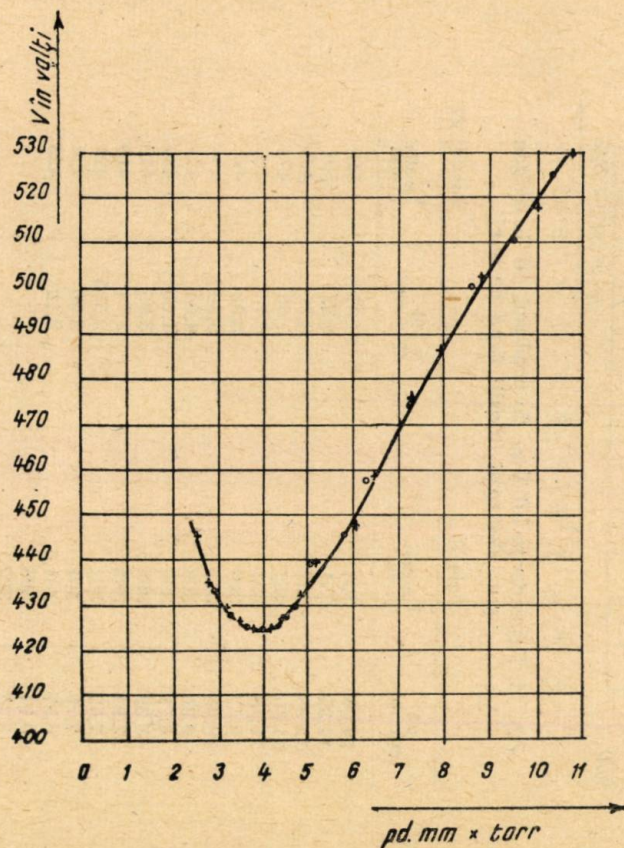


Fig. 9. Dependența lui V_{apr} de produsul pd la oxigen pur, electrozii folosiți fiind de aluminiu

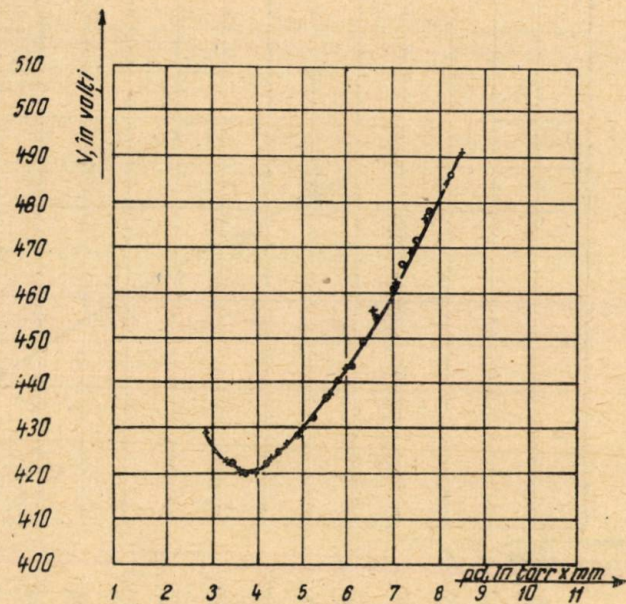


Fig. 10. Dependența potențialului de aprindere de produsul pd la oxigen pur, electrozii folosiți fiind de nichel

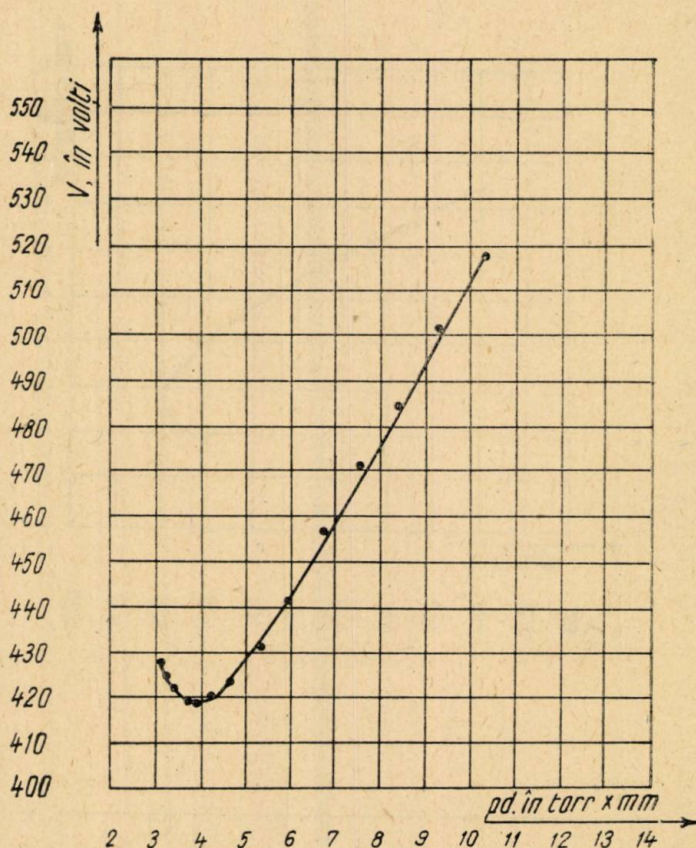


Fig. 11. Dependența lui V_{apr} de produsul pd la oxigen pur, electrozii folosiți fiind de aur

Tabelul I

pd (torr. mm)	V_{mediu} (Volți)
16,06	368
14,35	351
12,96	337
11,86	327
11,18	321
10,57	316
10,03	312
9,31	308
8,71	305
8,39	303,5
7,94	302
7,63	301
7,19	301
6,57	301,6
6,01	304
5,37	307

Tabelul II

pd (torr. mm)	V_{mediu} (Volți)
10,370	518
9,32	501
8,31	485
7,56	471
6,76	456
5,92	441
5,30	431
4,64	423
4,23	420
3,92	419
3,74	419
3,550	421
3,36	424
3,12	428

Rezultatele experimentale sînt înfățișate în tabelul nr. III.

Tabelul III

Natura electrozilor	Gazul	p. d torr. mm	V_{min} Volți
Aluminiu	Azot	7,67	293,25
	Oxigen	3,7	424
Nichel	Azot	7,2	301
	Oxigen	3,8	419,75
Aur	Azot	7,194	303,5
	Oxigen	3,85	419

CONCLUZII

Rezultatele experimentale obținute în lucrarea de față pot fi rezumate astfel :

1. S-a realizat un vas de descărcare cu electrozi mobili, deplasabili cu 1|100 mm chiar sub vid înaintat.

2. S-a constatat că pentru valori mici ale produsului pd (în cazul, experiențelor noastre $pd=20$ torr mm), valorile lui $V_{apr.}$ depind de natura electrozilor. Acest lucru se vede foarte clar din valorile lui $V_{apr.}$ minim care sînt specificate pe fiecare figură și în tabelul nr. 1.

3. Determinările menționate mai sus au fost făcute cu scopul de a compara rezultatele noastre cu cele cunoscute în literatura de specialitate în cazul gazelor pure. Aceste rezultate au servit ca bază pentru studiul amestecurilor formate din aceste gaze pure, avînd diverse concentrații.

4. Menționăm că determinările noastre au fost făcute cu electrozi nedegazați.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Meyer: *Ann. d. Phys.* 58, 297, (1919); 65, 335 (1921).
2. M. Penning: *Zs. f. Phys.* 46, 335 (1928); 57, 723 (1929); 72, 338 (1931).
3. B. Frey: *Ann. d. Phys.* 85, 381 (1928).
4. C. K. Моралёв: *Phys. Zs. d. Sowjetun.* 12, 667 (1937); ЖЭТФ, 7, 1430 (1937)
5. Balog: ЖЭТФ, 6, 481, (1936)
6. Glotov: ЖЭТФ, 7, 1037 (1937); *Phys. Zs. d. Sowjetun.* 12, 234, (1937).
7. G. Holst and E. Osterhuis: *Phys.* 1, 84, (1921).
8. B. A. Фабрикант: У. Ф. Н. 32, I (1947)
9. H. P. Warau: *Phyl. Mag.* XLII 246, (1921).

ЗАЖИГАТЕЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ БИПАРНЫХ СМЕСЕЙ БИАТОМНЫХ ГАЗОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей статье изучается зависимость зажигательного потенциала от продукта dr (d = давление, r = расстояние между электродами) и от природы электродов в чистых газах. В статье даны также экспериментальные результаты, касающиеся чистого кислорода и чистого азота; используемые электроды золотые, алюминиевые или никелевые, как и соответствующие кривые Пашена.

Дается описание экспериментального прибора, составленного из спускной трубы, имеющей передвижные электроды в пустоте, пустое устройство и приборы для препарирования азота и кислорода.

Изучается зависимость зажигательного потенциала от природы электродов и установлено, что для малых значений продукта dr ($dr = 20$ мм тор) значения зажигательного потенциала зависят от природы электродов.

Определения были произведены с целью установления степени схождения между этими результатами и результатами достигнутыми другими исследователями, в том случае, в котором электроды были идентичны или в случае использования электродов неизучаемых до сих пор.

Достигнутые результаты, которые будут представлены в другой работе, были использованы для изучения смесей, составленных из чистых газов с различными концентрациями.

THE BREAKDOWN POTENTIAL OF BIATOMIC GAS MIXTURES

SUMMARY

The breakdown potential dependence of the $p.d$ product (p = pressure d = distance between electrodes) and the nature of electrodes for pure gases, was studied.

The paper gives experimental results referring to pure oxygen and nitrogen, the electrodes used being gold, aluminium and nickel, as well as the corresponding Paschen curves.

The experimental device consisting of the discharge tube with mobile electrodes in vacuum, the vacuum and the nitrogen and oxygen preparing installations are described.

The manner in which the potential breakdown depends upon the electrode material was studied and it was found out that for the small $p.d$ values ($p.d < 20$ mm.torr) the potential breakdown values depend upon the kind (material) of electrodes.

The findings made according to the aforesaid paper had the aim to see up to what degree they approach the results obtained by other research workers for the case when the electrodes were the same, as well as for other electrodes that were not yet studied.

The results were used for the study of pure gas mixtures with various concentrations, which will be given in a future paper.

FONDUL ULTRAACUSTIC TERESTRU CA FACTOR BIOFIZIC PRIMAR. ORIGINEA PERIODICITĂȚII NICTEMERALE A ECHILIBRULUI COLOIDAL

ALEX. GRIGORIU, MIRELA PETRESCU, HORTENSIU IVANOVICI,
TRAIAN OLARU

Periodicitatea de 24 ore (nictemerală) a funcțiilor biologice nu este legată esențial de iluminarea exercitată de soare la locul observației biologice, nici de iluminarea artificială a subiectului și nici de ritmul muncii sau hranei.

Astfel *Volcker* (cf. *Carles* (1), p. 253) a constatat că la Akureyri, în N. Islandei, ritmul diurn al temperaturii corpului se menține și în timpul zilei sau nopții polare de lungă durată. Creșterea de după amiază a temperaturii corpului nu poate fi atribuită deci luminii solare. Ea nu este atribuibilă nici muncii omului, deoarece munca de noapte la paznici, personal sanitar, brutari etc., nu modifică mersul diurn al temperaturii (*Benedict, Gigou, Jores*, — cf. (1), p. 253).

Ciclu este însă în acord cu ora solară locală. Într-adevăr, curba termică individuală se decalează cu 12 ore pentru subiectul transportat la antipod, adică se inversează nu din cauza decalării muncii, ci din cauza decalării orei locale (*Osborne*, cf. (1) p. 254). Periodicități nictemerale asemănătoare, independente de somn sau de muncă sau de ora meselor, — dar depinzând numai de ora solară locală, — au fost observate și în ceea ce privește eliminarea clorurilor urinare, eliminarea bioxidului de carbon prin respirație, numărul globulelor roșii și al leucocitelor, secreția biliară, glicemia, p_H -ul serului sangvin etc. (*Jores, Forsgren, Laignel-Lavastine*, cf. (1), p. 254—256).

Pe linia incidentelor biologice normale sau patologice este de citat, de asemenea, frecvența lor mai mare la anumite ore ale zilei locale.

Astfel, nașterile se produc mai ales noaptea, între miezul nopții și ora 5, minimul lor situându-se spre amiaza locală (statistici pe sute de mii de cazuri, în localități și epoci diferite, cf. (1), p. 257—258). La crepusculul de seară foarte multe persoane suferă o depresiune nervoasă și funcțională, tuberculoșii simt dureri toracice numai la această oră, reumaticii se plâng de dureri articulare, în genere algiile și anxietatea sau lasitudinea sînt manifestări curente (cf. (1), p. 258—259).

Atacurile de gută acută tipică încep după miezul nopții și se termină dimineața. Hepatobiarii manifestă un ritm nocturn al crizelor.

Accidentele cardiopaticilor se întâmplă noaptea în proporție de 80% ; de asemenea noaptea crizele de hipervagotonie.

Tot noaptea decese, în cele câteva ore care preced zorile, observație cunoscută din antichitate (cf. (1), p. 259—261).

Ființa vie este deci un aparat extrem de sensibil la periodicitatea nictemerală a fenomenelor terestre și manifestă o periodicitate asemănătoare a fenomenelor ei proprii.

Deoarece ciclul nictemeral biologic nu-i legat de ciclul luminii solare și nici de ciclul orelor de muncă sau hrană, ci numai de ora solară locală, este cazul să atribuim această periodicitate unor fenomene mareice în atmosferă, pe ape și în scoarța terestră.

Explicația mareică nu rezolvă însă problema ciclului biologic nictemeral ci numai o încercuiește. Se va vedea din cele ce urmează că adevărata cauză stă în zgomotul de fond terestru, la rîndul său cauzat de :

a) *perturbații periodice*, adică marea gravitațională din litosferă, hidrosferă și atmosferă și marea termică din atmosferă ;

b) *perturbații aperiodice* ; deci de altă origine decît aceea mareică, cum ar fi activitatea vulcanică și seismică de pe glob, microseismele de origine meteorologică, perturbațiile atmosferice exprimate prin activitatea ciclonică, trecerea nucleelor izalobarice de creștere sau scădere a presiunii, alunecările ascendente ale maselor de aer pe suprafețe frontale ondulate, instabilitatea verticală generatoare de prăbușiri ale maselor de aer din altitudine, turbulența aerului și vibrațiile imprimate de vînt obstacolelor, vibrația mării sub furtună, căderea precipitațiilor etc.

Corelația experimentală între perturbațiile atmosferice și stabilitatea coloizilor. Identificarea cîmpului ultrasonor terestru ca agent floclant

Recent H. J. Fladung (1953) (2) a constatat, în urma unui riguros studiu prin metode statistice moderne, că decese brusce ale cardiacilor sînt legate strîns și neîndoielnic de toate perturbațiile nemareice din atmosferă citate mai sus și că sînt în netă scădere în perioadele de calm atmosferic. Aceeași constatare o face și Oberland pentru decese de toate tipurile (25). P. Courvoisier (3) a emis deja de peste un deceniu (1940) ipoteza că în variațiile de presiune stă sensibilitatea fiziologică la vreme, fără să coreleze însă cu fapte biologice intime, la nivelul celei vii și al umorilor din organism, și fără să facă legătura cu fondul sonor terestru.

Ipoteza generală că influența vremii se manifestă asupra coloizilor organici a fost mai întîi sugerată de Düll în 1939 (4) apoi dezvoltată de Losnitzer (5) în 1950 pe baza unei experiențe realizată în 1943 de Find-eisen (6). Acesta din urmă a închis ermetic într-o fiolă o soluție coloidală de trisulfură de arsen și a măsurat conductibilitatea ei în curent continuu găsind o relație remarcabilă cu fronturile și alte perturbații atmosferice.

T. Halse și *G. Caroli* (7) au găsit în 1951 o influență a vremii asupra fibrinolizei, iar *G. Caroli* și *J. Pichotka* (8) (9) în 1953 și 1954 o legătură între coagularea sîngelui și trecerea fronturilor calde sau rece, sau căderea averselor de ploaie.

De asemenea *K. Hummel* și *G. Caroli* (10) au arătat în 1952 dependența de vreme a aglutinării spontane a celulelor roșii (eritrocite) în soluție coloidală de polyvinyl-pyrrolidon (Kollidon K 30) și au ajuns la concluzia că însăși această soluție coloidală este influențată de vreme.

De aceea *R. Newwirth* și *K. Hummel* au reluat într-un studiu aprofundat (11) în 1952—54 problema influenței vremii asupra unei soluții coloidale de polyvinyl-pyrrolidon 10%, emulsoid liofil cu macromolecula avînd $M = 35000$, deci foarte apropiată de structura albușului de ou. S-a urmărit nu conductibilitatea, ca *Findeisen*, ci lumina difuzată la 45° de miceliile emulsoidului, deci variațiile în turbiditatea optică a soluției coloidale, măsurate cu un nefelometru Zeiss. Soluția, filtrată în prealabil pînă la stabilizare, era conținută într-o fiolă sterilă, bine curățată și închisă la flacără la capătul superior. Fiola era ținută într-o baie de apă, în ultratermostat Hoepfer, cu precizia $1/20^\circ\text{C}$. S-a utilizat lumină roșie sau verde obținută cu filtre, iar măsurătorile s-au făcut cu un fotometru Pulfrich. Sursa era stabilizată. Totul era ținut la întuneric, eliminîndu-se cu grijă orice lumină parazită. Turbiditatea optică a soluției coloidale a fost urmărită zilnic la orele 11—12, făcîndu-se uneori chiar mai multe măsurători pe zi.

Măsurătorile arată o variație netă a turbidității soluției coloidale în funcție de *trecerea frontului rece*, de *instabilitatea dinamică* a atmosferei și de *curentul inelar* de mare viteză (jet stream) de la baza stratosferei, curent care înconjură emisfera la latitudini medii și care se rupe și se reface periodic, ramurile lui determinînd apariția cîmpurilor ciclonice.

Trebuie să constatăm că la coloidul din fiola ermetic închisă la flacără, și ținută în întuneric sub carcasa aparatului la temperatură constantă nu putea pătrunde nici un *efect direct* al presiunii atmosferice, al temperaturii, umezelii, ionilor, cîmpului electric, radiounделor sau vîntului, nici al curentului inelar stratosferic, nici al fronturilor reci și nici al instabilității dinamice... Totuși soluția coloidală s-a dovedit sensibilă la ultimele trei fenomene. Deoarece nu s-au făcut măsurători continui în cursul zilei și nopții nu s-a putut urmări periodicitatea nictemerală a luminii difuzată de soluție.

Autorii fac ipoteza că asupra soluției coloidale influențează cîmpul unor radiații electromagnetice terestre și extraterestre, cauzate sau modificate de fenomenele meteorologice. Credem că acest lucru nu poate fi susținut deoarece carcasa metalică a aparatului constituia un blindaj care proteja fiola.

Singurele forme de energie ce puteau pătrunde la fiolă erau:

- radiațiile corpusculare penetrante asemănătoare radiației cosmice;
- cîmpul sonor transmis prin suportii aparatului.

Autorii nu semnalează vreo corelație cu radiația cosmică, destul de constantă de altfel, slab influențată de grosimea ecranului atmosferic (presiunea) și, după *Schonland* și *Viljoen* (12) slab intensificată în compo-

nenta ei moale de electronii accelerați în norii de furtună și abătuți apoi spre sol de câmpul magnetic terestru, la est de nor. De altfel influența radiației cosmice nu ar putea fi decât ireversibilă, așa că nici nu se pune problema ei.

Deci singurul agent care putea pătrunde la fiola cu soluția coloidală era câmpul acustic terestru.

În afară de această experiență crucială a lui *Neuwirth* și *Hummel* trebuie să cităm experiențele nu mai puțin importante ale lui *Takata* și școlii sale (13) (14) asupra indicelui de floclare al serului sangvin (număr de cm^3 reactiv *Takata* necesar pentru floclare), indice care a fost găsit că are o comportare nictemerală netă, trecînd prin minim (instabilitate coloidală) imediat înainte de răsăritul local, crescînd apoi brusc și apoi încet, atîngînd maximum (stabilitate coloidală) la apus și apoi scăzînd uniform (labilizare) pînă în dimineața zilei următoare.

Rezultă că în cursul zilei floclanță terestră (sau cosmică) scade treptat pînă seara, cînd își reia creșterea cu maximum în zori și atenuîndu-se brusc la răsărit.

Takata mai semnalează că factorul floclant crește la eclipse, scade la urcarea pe munți înalți, scade spre ecuator, variază invers cu numărul de pete solare și prezintă o periodicitate de 27 zile, corelată de *Takata* cu durata de rotație a soarelui, dar prea aproape de ciclul lunar de 28 zile ca să nu o corelăm cu pendularea periodică meridională de origine marelă a maselor de aer, descoperită recent de *R. Pava* (15), (16).

Pe aceeași linie, a condițiilor de floclare, sînt de citat experiențele lui *G. Piccardi* (17) asupra precipitării BiOCl , la diluție cu apă a soluției de BiCl_3 , precipitare puternic dependentă de vreme cum a semnalat însuși *Piccardi* și au reliefat statistic comentatorii săi (18), (19), (20), precum și experiențele extrem de interesante ale lui *H. Bortels* (21) privitoare la apariția treptată a precipitatului de fosfat de calciu: floconos în regim ciclonic (decî perturbat), filamentos în regim anticiclonic (mai calm), corelat strîns cu variația interdiurnă a presiunii atmosferice.

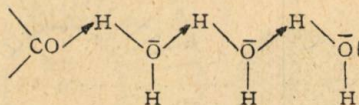
Bortels semnalează și o variație diurnă a precipitatului, cauza externă perturbatoare fiind ca și la *Takata* mai intensă dimineața (flocoane) și slăbind spre seară (filamente), ceea ce constituie o confirmare a experiențelor de lungă durată realizate de *Takata*.

Tot *Bortels* identifică o influență meteorologică asupra solidificării apei subrăcite la -6° , echilibrul labil de fază stricîndu-se ușor în zilele cu variație interdiurnă a presiunii în creștere de la valori negative la pozitive. (Aici nu poate fi vorba de ceva similar cu bioefectul direct al presiunii, manifestat prin eliberarea gazelor dizolvate în ser, la scăderea presiunii).

După cît se vede atît procesul precipitării ireversibile *in vitro* a suspensoizilor minerali sau emulsoizilor organici, sau înghețarea apei subrăcite, cît și ușoara pendulare reversibilă între coagulare și redizolvare, ca în experiențele lui *Neuwirth* și *Hummel* asupra turbidității optice a soluției coloidale, depînd de vreme sub foarte variate aspecte. Considerăm că toată gama de fenomene meteorologice sau terestre care influențează coagularea pot fi reduse la un unic agent fundamental, care este câmpul ultrasonor generat de acele fenomene diverse.

Mecanismul floculării reversibile în humori și celule sub influența cîmpului ultraacustic terestru

În acest scop să amintim că proteinele serului sangvin sînt asociații strînse lipido-proteice (*cenapse*) care poartă sarcini electrice aduse de ionii electrolitilor din ser și care sînt protejate de mai multe strate de apă fixată prin punți de hidrogen la grupurile carbonamidice



Din cauza cantității mari de apă fixată pe miceliul proteino-lipidic, acesta manifestă aceleași proprietăți optice ca și apa ce îl înconjoară și de aceea soluția este *optic vidă*, aproape limpede, cu o foarte slabă difuzie, și foarte stabilă.

Apa, în același timp, este un amestec de polimeri $(H_2O)_n$ și monomeri H_2O .

Dacă mediul este sărăcit (de ex. prin alcool) în monomeri de apă-atunci miceliul pierde straturile periferice și rămîne probabil cu un singur strat de apă legată. În această situație el se separă de mediul dispersiv (apa), dar rămîne tot în stare lichidă, constituind ceea ce se numește un *coacervat*. Coacervatul poate fi precipitat definitiv prin pierderea apei restante sau a dublului strat electric. El reprezintă deci o *fază intermediară, nemiscibilă* cu apa, în procesul precipitării. Coacervatul poate fi emulsionat în mediul de dispersie, ceea ce va mări turbiditatea optică a soluției, sau poate fi redisovat la diluție, adică la mărirea concentrației în monomeri de apă. *Precipitarea sub formă de coacervat este deci reversibilă* (22).

La trecerea unei ultrasonore prin soluția coloidală, miceliile hidratate se vor pune în mișcare odată cu mediul dispersiv, suferind din partea acestuia presiuni și accelerații alternative, cu frecvența undei. Pentru particule de diferite mărimi (și densități) există cîte o frecvență optimă la care se obține o amplitudine maximă a oscilației particulei. La o aceeași frecvență unele particule vibrează intens, altele rămîn aproape imobile (*Brandt, Freund, Hidemann*, cf. (24), p. 812—813, fig. 552), după inerția pe care o manifestă în fața impulsului acustic alternativ. Este deci de presupus că stratele periferice de apă ale miceliilor *cenapselor* din ser (ca și ale soluției de polyvinylpyrrolidon cu care au lucrat *Neuwirth și Hummel*) vor atinge, sub influența variației ultraacustice de presiune, viteze mult mai mari decît nucleul micelar dens și inert (macromolecula miceliului) și îl vor părăsi brusc, lăsîndu-l în urmă doar cu primul strat de apă fixat, deci în situație de *coacervat emulsionat* pînă la macromolecula respectivă (fig. 1). În această situație *indicele său de refracție este diferit de al apei și soluția se opaciază*, difuzînd mai intens lumina, ca la *Neuwirth și Hummel*, sau fiind mai ușor floculabilă, ca în experiențele lui *Takata*.

Miceliul coacervatului poate însă în clipa următoare să-și refacă stratele de apă și să se redisolve deoarece a luat naștere nu prin sărăcirea soluției în monomeri de apă, ci prin expulzare mecanică a păturilor sale prin acțiunea ultrasunetului. Între numărul de miceli care suferă des-

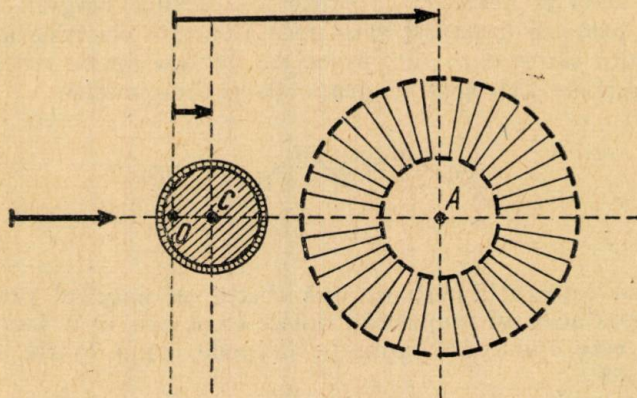


Fig. 1.

hidratarea ultrasonoră și numărul miceliilor care își refac stratele de apă există deci un *echilibru statistic*, care determină gradul de turbiditate optică. Procesul este așadar *reversibil* și se menține în strânsă legătură cu intensitatea cîmpului sonor.

Considerăm deci că mecanismul descris mai sus este singurul care convine pentru a explica acțiunea floculantă reversibilă a cîmpului sonor terestru asupra coloizilor serului.

În ceea ce privește *gliodul* celular el este un emulsoid coacervat într-o stare vecină cu flocularea. Atît citoplasma cît și incluziunile ei vizibile (nucleu, vacuole, chondrosomi etc) sînt tot atîtea faze coacervate nemiscibile. Semnalăm, ca fapt important de experiență, că sub influența unor ușoare presiuni exterioare citoplasma poate suferi o foarte ușoară coagulare reversibilă (cf. [22], p. 74), manifestată printr-o *opacifiere reversibilă*. Deci aceeași presiune sonoră poate impune, de data aceasta direct, o coagulare reversibilă a citoplasmei celulare, ca și la albuminele serului.

Știm că flocularea înseamnă, în ființa vie, boală, bătrînețe și moarte. Flocularea reversibilă, datorită cîmpului sonor terestru, sub orice formă ar fi ea, facilitează flocularea ireversibilă ulterioară. De aici sensibilitatea la perturbații atmosferice și terestre a organismului uman, mai ales în locurile lui bolnave, cu echilibrul coloidal deja periclitat (reumatici, hepatobiliari, cardiaci etc).

Mecanismul generării cîmpului ultraacustic terestru

Cum este generat cîmpul ultrasonor terestru și cum acționează?

a) Mareele scoarței, slab perceptibile cum sînt, provoacă fără îndoială o slabă frecare a microcistalelor blocurilor scoarței, marea oceanică reprezintă un tăvălug de apă care contribuie la plierea periodică a scoarței,

marea atmosferică (gravitațională și termică) deplasează de asemenea mase enorme peste scoarță și intensifică fără îndoială pliarea acesteia. Subliniem aici rezultatele lui V. V. Popov (23) care a semnalat existența unor deformații periodice și aperiodice ale scoarței sub acțiunea temperaturii. Ele sînt datorite încălzirii neuniforme a suprafeței solului și au caracter local. Variațiile de temperatură pătrund pînă la aproximativ 1,5 m dar deformațiile pătrund mult mai adînc, pînă la 1 km. Toate acestea generează, fără îndoială, prin frecarea amintită a cristalelor, fondul terestru de ultrasunet, probabil slab, dar cu periodicitate diurnă după ora solară locală.

Activitatea mareică meridională (deplasarea alternativă spre N și S într-o semiperioadă lunară), semnalată de Pava (15), (16), explică, tot prin pliarea scoarței sub influența variațiilor de presiune, ciclul de 27 zile al lui Takata, — două semiperioade lunare (regăsit și de Burkhard (18) din analiza datelor lui Piccardi (17)), — slăbirea agentului floclant natural spre ecuator (prin atenuarea migrării meridionale) și în altitudine (prin absorbția ultrasunetului în aer).

b) Activitatea vulcanică și seismică, prin undele respective, produce vibrația infrasonoră a scoarței. Aceasta la rîndul ei, datorită frecării sub infrasunet a cristalelor din blocurile continentale, generează ultrasunet. De asemenea, în perioada *preseismică*, alunecarea plastică a blocurilor din vatra cutremurului produce aceeași frecare a cristalelor deci același ultrasunet la care sînt sensibili caii, cîinii și unii oameni.

În bolțile galeriilor de mină tot alunecarea plastică a rocilor este aceea care produce ultrasunetul de alarmare care determină fuga șobolanilor din galerii, ceea ce constituie un avertisment bine cunoscut de minierii care astfel reușesc să părăsească zona periclitată înainte de surparea bolții.

Acelaș ultrasunet alungă aceiași șobolani din navele la care se practică curățirea prin ultrasunet de moluștele fixate pe exteriorul carenei.

În toate aceste cazuri, starea anxioasă care este provocată de ultrasunet oamenilor sensibili sau animalelor este semnalul de alarmă al organismului în fața floclării coloizilor săi.

Pentru existența înaltei frecvențe a vibrațiilor, deci a ultrasunetului, pledează și fenomenele luminoase din atmosferă, care uneori însoțesc cutremurul. Iluminarea păturilor inferioare ale atmosferei nu poate fi datorită decît *încărcării alternative a scoarței, prin efect piezoelectric, sub influența ultrasunetului seismic*, generat la rîndul său de infrasunetul seismic.

Tot aici trebuie semnalată și prezența microseismelor asociate depresiunilor de pe mare. Este probabil că pe mare masa depresionară *se organizează* ca un bloc dinamic și vibrează la rezonanță, după una sau mai multe frecvențe proprii, cu mare energie. Pe uscat această organizare este stricată de accidente orografice, de aceea nu se mai intensifică prin rezonanță și nu mai dă microseisme. Totuși și pe uscat atmosfera depresionară vibrează probabil pe volume mai mici producînd un spectru mai larg de infrasunete mai slabe care apoi, în scoarță, se transformă în ultrasunet. Anxietatea multor persoane în calmul de înaintea furtunii, care

marchează sosirea depresiunii sau a perturbațiilor frontale, este un indice biologic al prezenței câmpului ultrasonor, produs de infrasunetele ce pătrund în scoarță.

Variațiile rapide ale presiunii la suprafața pământului, pe vaste zone geografice, produc probabil aceeași pliere sau vibrații ale scoarței și același câmp ultrasonor care influențează stabilitatea coloizilor și precipitățile (Bortels), așa cum am văzut.

Alunecările ascendente pe suprafețele frontale ondulate întrețin vibrația infrasonoră a scoarței, la fel trecerea fronturilor calde sau reci, instabilitatea verticală a aerului, turbulența și efectele vântului asupra obstacolelor. La vînt este de semnalat că sunetul ascuțit și puternic, care este uneori urletul vîntului, are probabil efecte directe, apropiate de acelea ale ultrasunetului, asupra precipitărilor coloidale și deci determină anxietatea viscerală de alarmă.

De asemenea, căderea violentă a precipitațiilor (aversele) este de natură să genereze un câmp infrasonor, transformat imediat în câmp ultrasonor local, care să influențeze apariția coacervatului seric. Lungirea timpului de coagulare a singelui la averse și fronturi (8) (9) reprezintă un efect identic cu acela constatat de Hunzinger și colaboratorii săi (cf. [24], p. 94) (26) în laborator sub influența ultrasunetului. El este explicat de autor prin distrugerea sistemului protrombinic din cauza vibrației ultrasonore.

În sfîrșit, paralelismul unor atari fenomene cu ciclul solar se explică ușor prin corelația strînsă între acest ciclu și circulația generală a atmosferei, generatoare de perturbații, vînt, averse și poate și alte fenomene biotrope.

BIBLIOGRAFIE

1. L. M. Carles: *Agents pathogènes du climat*, — Ed. Masson, Paris, 1945.
2. H. J. Fladung: *Archiv. Meteor. Geophys. Biokl.*, — B, v. 4, p. 85, 1953.
3. P. Courvoisier: *Archiv. Meteor. Geophys. Biokl.*, — B, v. 1, p. 115, 1949.
4. B. u. T. Düll: *Bioklim. Beiblätter*, — v. 6, p. 121, 1939.
5. H. Losnitzer: *Schrieffeur. Deutsch. Bädervorb.*, — v. 5, p. 255, 1950.
6. E. Findeisen: *Bioklim. Beiblätter*, — v. 10, p. 23, 1943.
7. T. Halse, G. Caroli: *Ärtzt. Forsch.*, — v. 5, p. 147, 1951.
8. G. Caroli, J. Pichotka: *Naturwiss.*, — v. 39, p. 193, 1953.
9. G. Caroli, J. Pichotka: *Archiv. Meteor. Geophys. Biokl.*, — B, v. 5, p. 403, 1954.
10. K. Hummel, G. Caroli: *Z. Hyg.*, — v. 135, p. 592, 1952.
11. R. Neuwirth, K. Hummel: *Wettereinflüsse auf das Lichtstreuvermögen von kolloidalen Lösungen (Polyvinylpyrrolidon)*, — *Arch. Meteor. Geophys. Biokl.*, — v. 5, p. 388, 1954.
12. B. F. Schonland, J. P. T. Viljoen: *Proc. Roy. Soc. A.*, — v. 140, p. 314, 1933.
13. M. Takata: *Archiv. Meteor. Geophys. Biokl.*, — B, v. 2, p. 486, 1952.
14. H. Sarre: *Mediz. Meteor. Hefte*, — v. 5, p. 25, 1951.
15. R. Pava: *Contribuții la studiul mareelor atmosferice*, — *Bul. Șt. Acad. R.P.R.*, s. Mat. Fiz., t. 6, nr. 1, p. 157, 1954.
16. R. Pava: *Beiträge zur Forschung der atmosphärischen Gezeiten*, — *Acta Agron. Acad. Sci. Hungaricae*, — t. 5, p. 261, 1955.
17. G. Piccardi: *Über einen Zusammenhang zwischen atmosphärischen und kosmischen Phänomenen und physikalisch-chemischen Prozessen*, — *Arch. Meteor. Geophys. Biokl.*, — v. 6, p. 486, 1955.

18. O. Burkhard: *Arch. Meteor. Geophys. Biokl.*, — v. 6, p. 506, 1955.
19. Udo Becker: *Arch. Meteor. Geophys. Biokl.*, — v. 6, p. 511, 1955.
20. F. Mofetti: *Arch. Meteor. Geophys. Biokl.*, — v. 6, p. 517, 1955.
21. H. Bortels: *Zwei einfache Modelle meteorologischer Reaktionen in ihren Beziehung zu Luftdruckänderungen und zur Solaraktivität*, — *Arch. Meteor. Geophys. Biokl.*, — v. 5, p. 235, 1954.
22. P. Meunier: *Conférences préparatoires au certificat de chimie biologique*, — *Centre de documentation universitaire*, Paris, 1948.
23. V. V. Попов: *Isv. Ak. Nauk*, — ser. *Gheofiz.*, nr. 7, p. 913, 1960.
24. Ludwig Bergmann: *Der Ultraschall*, — Ed. VI, S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1954.
25. E. Oberland: *Arch. Meteor. Geophys. Biokl.*, — t. 6, p. 280, 1955.
26. W. Hunziger, H. Süllman, G. Viollier: *Helv. Chim. Acta*, — v. 33, p. 198, 1950.

ЗЕМНОЙ УЛЬТРААКУСТИЧЕСКИЙ ФОНД — В КАЧЕСТВЕ ПЕРВИЧНОГО БИОФИЗИЧЕСКОГО ФАКТОРА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

1. Приливы и отливы, атмосферные возмущения, изменение давления, наряду с сейсмическими движениями, определяют несомненно инфразвуковое поле, которое превращается в земной коре в биоактивное ультразвуковое поле.

2. Земное ультразвуковое поле является первичным биофизическим фактором также как и атмосферные ионы. Оно действует на сыворотку, путём обратной флокуляции мицелий в форме коацерват вследствие механического удаления периферийной воды, а также на клетку путём лёгкой обратной флокуляции цитоплазмы, вследствие ультразвукового давления.

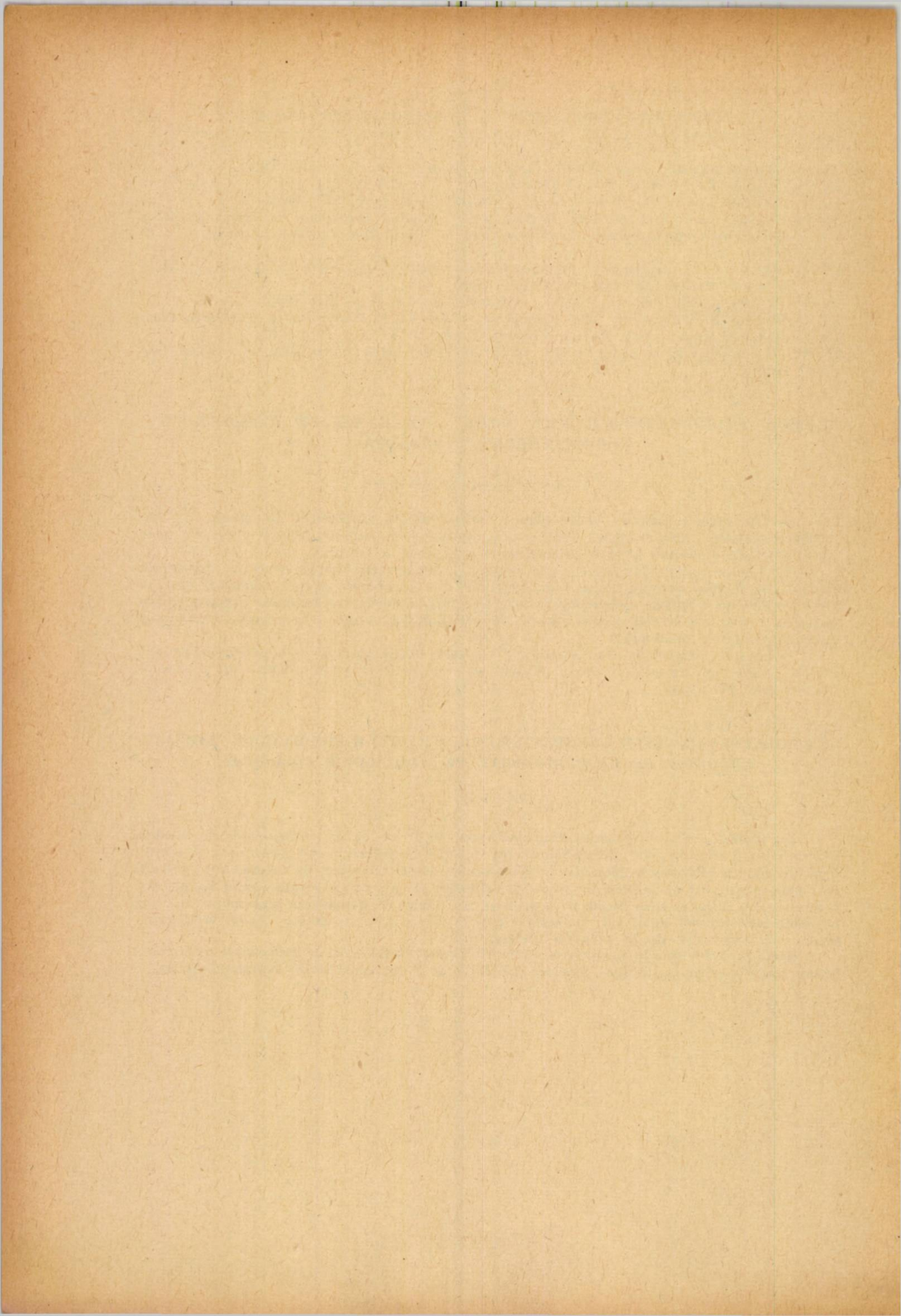
Очевидно, обратная флокуляция облегчает последующую необратимую флокуляцию, нарушая, таким образом, общую коллоидальную устойчивость организма и жизненные функции.

LE FOND ULTRAACOUSTIQUE TERRESTRE COMME FACTEUR BIOPHYSIQUE PRIMAIRE. L'ORIGINE DE LA PÉRIODICITÉ DE L'ÉQUILIBRE COLLOIDAL

RÉSUMÉ

Les marées, les perturbations atmosphériques, les fronts et les variations de la pression déterminent, à côté de l'activité séismique, un champ infrasonore qui se transforme en écorce dans un champ ultrasonore bioactif. Le champ ultrasonore terrestre, de même que lesions de l'atmosphère, est un facteur biophysique primaire. Il agit sur le sérum par la floculation réversible des micelles sous forme de coacervat, à la suite de l'expulsion mécanique de l'eau périphérique, comme aussi sur la cellule par la floculation réversible légère de la cytoplasma, comme effet de la pression ultrasonore.

Il est probable que la floculation réversible facilite la floculation irréversible ultérieure, faisant ainsi souffrir la stabilité générale colloïdale de l'organisme et ses fonctions vitales.



ASUPRA CARACTERISTICILOR UNOR CONTORI ALFA CU SCÎNTEI

TR. CREȚU și R. MIHAI

Numărul relativ mare de lucrări consacrate în ultimii ani contorului cu scînteii dovedește un interes crescînd pentru acest instrument de detecție.

Principiul de funcționare al acestui contor este extrem de simplu: la trecerea prin spațiul dintre doi electrozi (unul cu raza de curbură foarte mică) conectați la o diferență mare de potențial, ionii, electronii, sau cuantele gama favorizează descărcarea prin scînteii datorită formării sarcinilor electrice în spațiul respectiv, în urma ionizării.

H. Greinacher (1) a fost primul care a propus construirea unui contor pe baza acestui principiu, dar contorul propus are o serie de lipsuri ca: nestabilitate, pantă mare, domeniul de lucru puțin întins, și imposibilitate de a separa diferitele tipuri de particule.

W. V. Chang și Y. Rosenblum (2) au arătat că aceste neajunsuri pot fi înlăturate dacă se utilizează o placă subțire de metal în calitate de catod, iar drept anod servește un fir metalic subțire (diametrul aproximativ 0,1 mm) întins deasupra plăcii la o distanță de 1—2 mm.

Un avantaj esențial al contorilor Chang și Rosenblum îl constituie faptul că sînt practic insensibili la cuantele gama și particulele beta. Aceasta permite înregistrarea particulelor cu densitate de ionizare mare (particulele alfa și fragmente de fisiune nucleară) și a neutronilor, chiar în cazul cînd sînt însoțite de un fond gama puternic, înlăturînd în acest fel greutățile legate de construcția detectorilor cu compensare.

Contorii cu scînteii lucrează direct în aer ceea ce ușurează foarte mult înregistrarea particulelor grele, deoarece se înlătură necesitatea confecționării ferestrelor extrem de subțiri cerute de parcursul scurt al particulelor grele în substanță.

Construcția contorilor este foarte simplă. Amplitudinea impulsurilor este suficient de mare pentru ca înregistrarea să poată fi făcută direct la un numărător sau să fie observate direct pe un oscilograf.

Timpul de creștere al impulsurilor este foarte scurt (10^{-8} — 10^{-7} sec) iar timpul de scădere este dat de caracteristicile circuitelor electronice: avem deci de a face cu contori rapizi.

Eficacitatea contorilor depinde mult de direcția de mișcare a particulelor ionizante (3). Aceasta permite utilizarea contorilor indicați pentru înregistrarea numai a particulelor care se deplasează pe o direcție cerută de condițiile experienței. Datorită avantajelor enumerate ale contorilor cu scînteii în ultimii ani au apărut o serie de cercetări (4—13) consacrate studiului regimului de lucru sau a domeniului de utilizare a acestor contori.

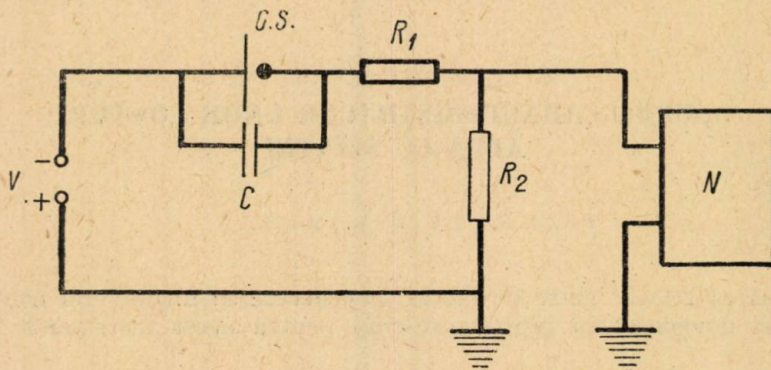


Fig 1. Schema montajului de lucru. C. S. — Contorul; C — capacitate; V — tensiune înaltă; R_1 și R_2 — rezistențe; N — numărător.

Scopul lucrării de față a fost clarificarea unor caracteristici ale contorului cu scînteii în cazul înregistrării particulelor alfa. Ne-am ocupat în special de felul în care caracteristica contorului este influențată de rezistența de sarcină și de studiul dimensiunilor domeniului din jurul firului în care particulele alfa sînt înregistrate.

Contorul constă dintr-o placă de cupru cu suprafața bine șlefuită, deasupra căreia au fost întinse fire de Wolfram cu diametrul de 0,2 mm.

Paralel cu contorul a fost conectată o capacitate C. Pentru a evita descărcarea în arc, în circuit trebuie conectată o rezistență ($R = R_1 + R_2$), suficient de mare (fig. 1). Raportul dintre R_1 și R_2 depinde numai de felul în care vrem să alegem mărimea pulsurilor la ieșire.

La montarea plăcii și întinderea firelor s-au folosit metode care principial nu diferă de cele indicate în literatură.

Pentru a fi siguri de buna funcționare a contorului, inițial am verificat stabilitatea lui. S-a observat că incluzînd contorul într-un volum relativ mic caracteristicile se schimbă repede datorită prezenței ozonului care grăbește oxidarea electrozilor. De aceea stabilitatea a fost studiată în aer într-o cameră mare, ferită totuși de curenți de aer. În aceste condiții contorul a lucrat peste 30 de ore, iar abaterile observate nu au diferit mult de cele statistice.

În felul acesta s-a observat că schimbările obișnuite de presiune și temperatură nu au influențat vizibil asupra regimului de funcționare al contorului.

Din caracteristica curent-tensiune (7) a contorului rezultă că rezistența de sarcină R nu poate fi aleasă arbitrar, ci trebuie să fie cuprinsă într-un domeniu bine definit. În lucrarea de față s-a urmărit modul în care de-

pinde panta caracteristicii de lucru a contorului de valoarea rezistenței R , ridicînd caracteristica de lucru pentru diferite valori ale lui R . Cele mai semnificative dintre aceste curbe sînt reprezentate în figura 2 și fig. 3. Eficacitatea contorului a fost mărită utilizînd ca anod 5 fire întinse paralel la distanța de 3 mm unul de altul și la distanța $d = 1,4$ mm de placă.

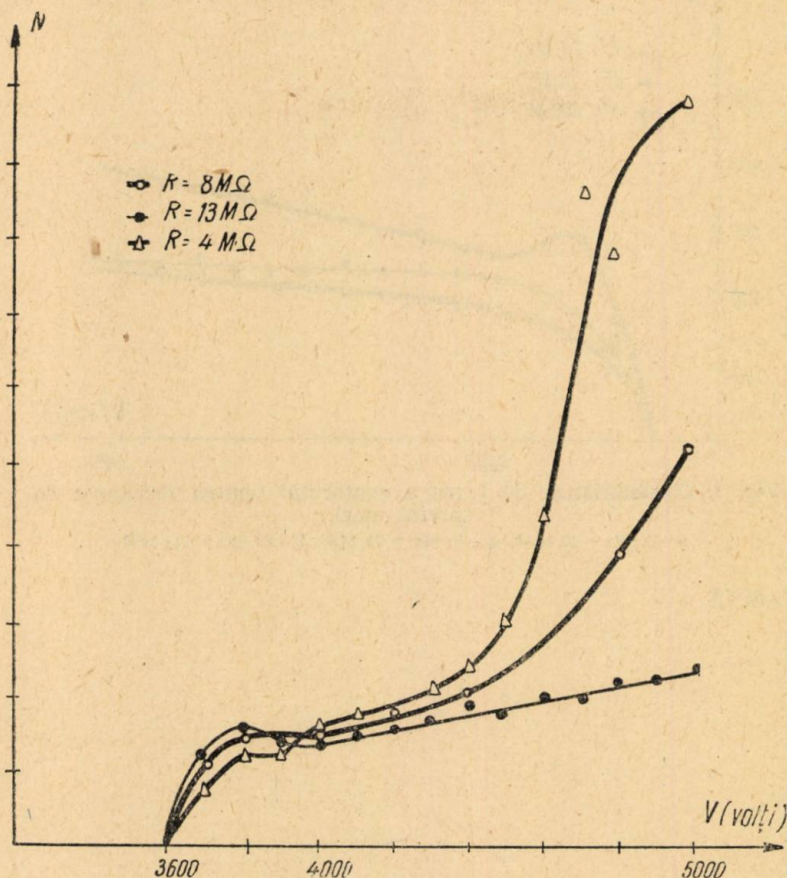


Fig. 2. Caracteristica de lucru a contorului pentru rezistențe de sarcină relativ mici.

Δ — pt. $R_1+R_2=4\text{ M}\Omega$; $\circ$ — $R_1+R_2=8\text{ M}\Omega$; $\bullet$ — $R_1+R_2=13\text{ M}\Omega$

Figura 4 arată dependența pantei P a palierului caracteristicii de R , prin pantă înțelegînd raportul:

$$P = \frac{N(V_2) - N(V_1)}{V_2 - V_1} \cdot \frac{1}{N_m}$$

în care: $N_m = \frac{N(V_1) + N(V_2)}{2}$ este numărul mediu de pulsuri în timpul t .

— $N(V_2)$ și $N(V_1)$ sînt numerele de pulsuri în timpul t corespunzătoare respectiv sfîrșitului și începutului palierului.

— V_2 și V_1 sînt tensiunile de încetare respectiv de începere a palierului.
Fig. 4 indică existența unei valori optime a rezistenței pentru care panta este minimă, lucru foarte important în special cînd nu dispunem de sursă de alimentare bine stabilizată.

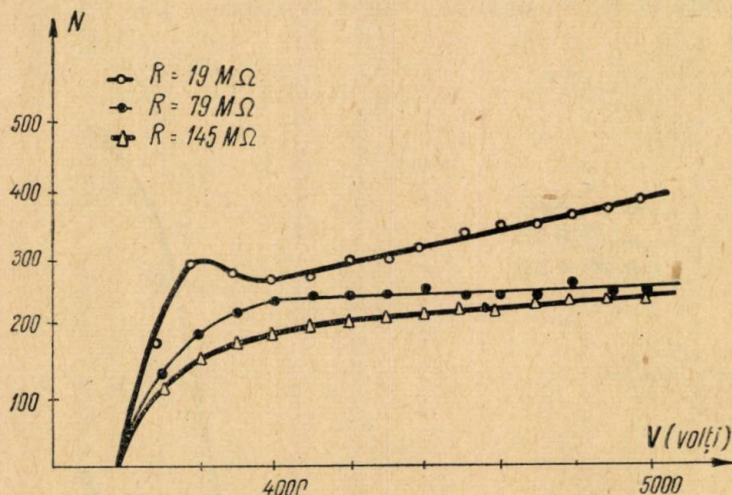


Fig. 3. Caracteristica de lucru a contorului pentru rezistențe de sarcini mari.

○ — $R_1 + R_2 = 19 \text{ M}\Omega$; ● — $R_1 + R_2 = 79 \text{ M}\Omega$; △ — $R_1 + R_2 = 145 \text{ M}\Omega$

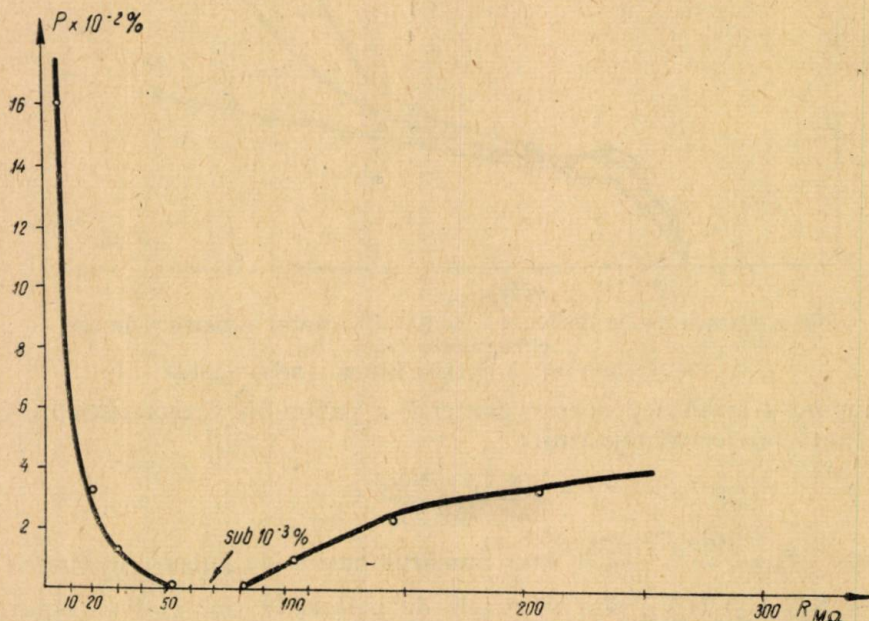


Fig. 4. Dependența pantei palierului de mărimea rezistenței de sarcină.

Curba $P = f(R)$ așa cum reiese din figura 4 are o formă foarte asemănătoare cu curbele lui Paschen (14), ceea ce ar putea să aibă o legătură cu mecanismul de funcționare al contorului.

Se observă că la începutul caracteristicii de lucru a contorului apare un pic pentru valori mici ale lui R și dispare pe măsură ce R crește. Tensiunea la care apare acest pic se deplasează o dată cu R (fig. 5).

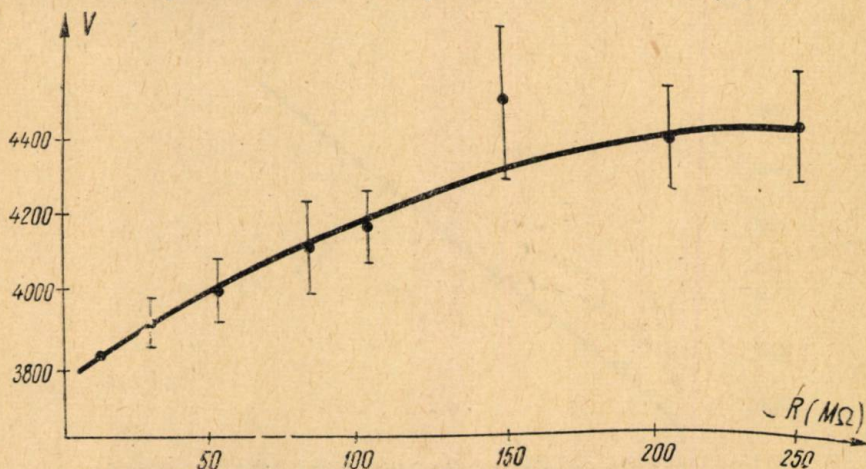


Fig. 5. Deplasarea picului de la începutul caracteristicii de numărare funcție de rezistența de sarcină.

Eficacitatea contorului depinde pe lângă numărul de fire și de distanța fir-placă. Aceasta se vede în fig. 6 care reprezintă numărul de pulsuri funcție de distanța fir-placă în cazul a două surse de activități diferite.

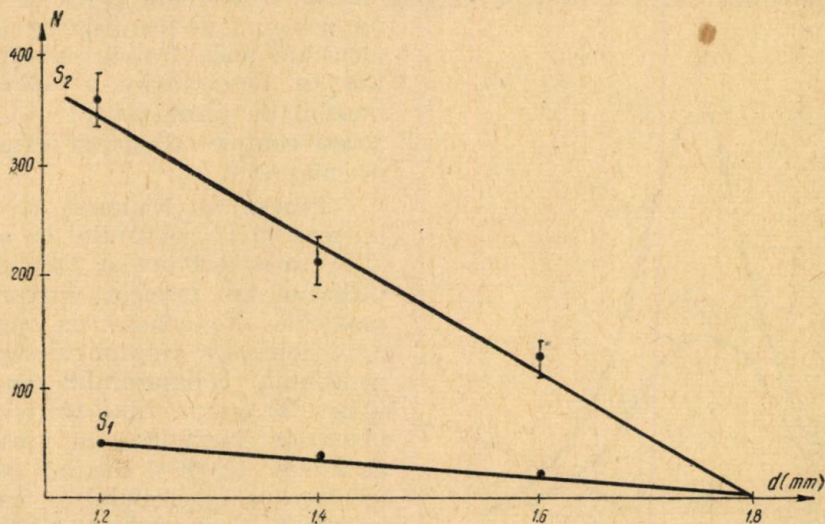


Fig. 6. Dependența vitezei de numărare de distanța dintre fir și placă.

$$\Lambda_{S_2} > \Lambda_{S_1}$$

De asemenea, de distanța d , depinde și tensiunea minimă de funcționare a contorului. (fig. 7).

O caracteristică foarte importantă a contorului cu scînteii este faptul că are un fond redus. Fondul observat de noi nu depășește un impuls în timp de 30 minute.

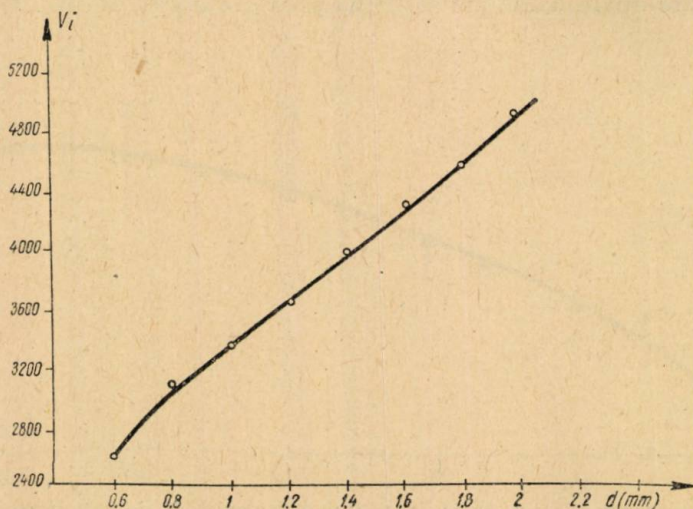


Fig. 7. Variația tensiunii minime de funcționare funcție de distanța d .

Într-o serie de experiențe cu particule care posedă o densitate de ionizare mare sînt necesari contori sensibili numai la anumite particule și cu un domeniu de înregistrare de dimensiuni mici. Datele experimentale de determinare a volumului sensibil în jurul firului arată că acești contori corespund cerințelor de mai sus.

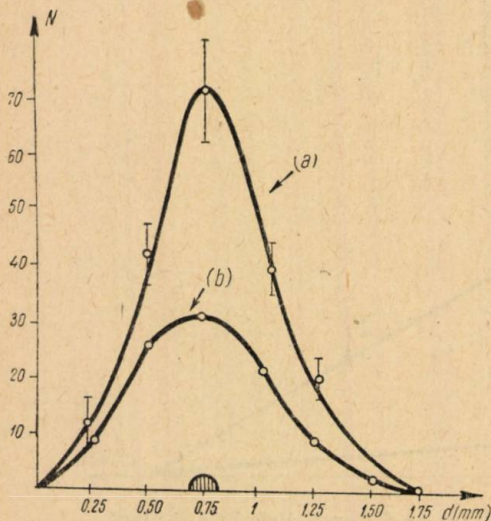


Fig. 8. Volumul sensibil în jurul firului.

Pentru determinarea volumului sensibil al contorului cu o precizie satisfăcătoare a trebuit să utilizăm un fascicol îngust de particule alfa, colimat cu ajutorul unui colimator dreptunghiular. Dimensiunile colimatorului au fost $(0,2 \times 20 \text{ mm})$ el fiind tăiat într-o placă de plexiglass cu grosimea de 9 mm. Unghiul maxim de împrăștiere a fascicolului a fost de un grad și 18 minute. Măsurătorile au putut fi efectuate nu-

mai după ce a fost asigurat un paralelism satisfăcător între fir și fantă.

Deplasarea fantei, și o dată cu ea a sursei, s-a făcut cu ajutorul unui șurub micrometric cu pasul de 0,5 mm.

În figura 8 e arătată dependența vitezei de numărare de poziția fantei în cazul unui singur fir pentru două distanțe fir-placă.

În fig. 9 se vede că în cazul a două fire, datorită influenței reciproce, maximele se deplasează spre exterior. În ambele cazuri însă se observă că lărgimea volumului sensibil este aproximativ dublul diametrului firului.

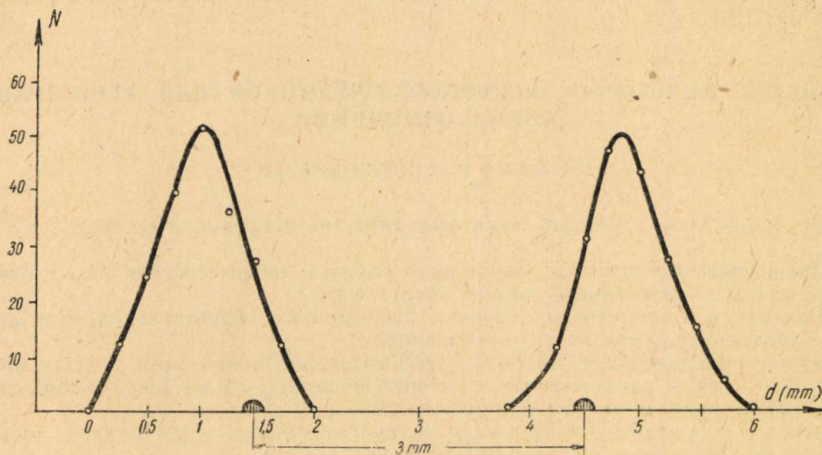


Fig. 9. Volumul sensibil în cazul a două fire apropiate.

Aceste rezultate concordă cu cele obținute de Daniel Plank și Laborie Paul (15) utilizând o fantă pătrată.

În concluzie considerăm că au fost puse în evidență următoarele proprietăți ale contorului cu scînteii.

1. Fluctuațiile obișnuite de presiune și temperatură nu au influențat sensibil regimul de lucru al contorului.

2. Contorul cu scînteii poate fi practic considerat fără fond.

3. Rezistența de sarcină poate fi aleasă pentru fiecare contor astfel încît panta caracteristicii de lucru să fie minimă.

4. Datorită volumului sensibil mic contorul cu scînteii este indicat pentru măsurarea distribuției intensității unui fascicol de particule alfa; el ar putea fi de exemplu utilizat ca detector într-un spectrometru magnetic.

În încheiere, ținem să mulțumim tov. conf. A. Gelberg pentru sprijinul dat.

BIBLIOGRAFIE

1. Greinacher H.: *Z. tehn. Phys.*, **16**, 165, 1936.
2. W. V. Chang și Y. Rosenblum: *Phys. Rev.*, **67**, 222, 1945.
3. B. Í. Isaev și Andreescov J. E. T. F. **23**, 355, 1955
4. R. D. Connor: *Proc. Phys. Soc. B*, **64**, 30, 1951.
5. R. D. Connor: *J. Sci Instr.*, **29**, 12, 1952.

6. P. Savel: *C. R. Acad. Sci. Paris*, **234**, 2596, 1952.
7. N. Nachman, L. Schächter și N. Toția: *Revue de Physique*, T. III, nr. 3-4, 1958.
8. D. Bally și E. Tarină: *Nuclear electronics I*, AIEA, 1962, 352/354.
9. Lewowska Ludmila, Lewowski Todensz, Sujak Bogdan: *Zesz. nauk. Politechn. Wrocławsk* nr. 41, 67-74, 1960.
10. Rytz A.: *Helv. Phys. Acta*, 22, 3, 1949.
11. Swetmick M. I. și Anton N. G.: *Nucleonics*, **15**, nr. 6, 93, 1957.
12. Savel P.: *C. R. Acad. Sci. Paris*, **235**, 156, 1952.
13. Blanc D.: *J. Phys. et radium*, **15**, 483, 1954.
14. Карпов N. A.: *Fenomene electrice în gaze și vid*. E. T. 1955. Cap. XIII.
15. Blanc Daniel și Laborie Paul: *C. R. Acad. Sci.*, Paris **257**, nr. 17, 1786-1789, 1961.

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ИСКРОВЫХ СЧЕТЧИКОВ ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ АЛЬФА ИЗЛУЧЕНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В данной статье изучаются некоторые свойства искровых счетчиков типа Росенблума.

Прежде всего исследуются зависимость рабочей характеристики от нагрузочного сопротивления и эффективный объем вокруг нити.

Найдено что существуют значения нагрузочного сопротивления, для которых плато рабочей характеристики — наилучшее.

Ширина эффективного объема, приблизительно, в два раза больше диаметра нити. В частности, в данном случае, для нити диаметром 0,2 мм. ширина эффективного объема равна приблизительно 0,5 мм.

Вследствие взаимодействия между нитями максимумы эффективности смещаются наружу, без изменения ширины эффективного объема.

LES PROPRIÉTÉS DES COMPTEURS α À ÉTINCELLES

RÉSUMÉ

Cet article présente quelques propriétés des compteurs à étincelles du type Rosenblum. On a étudié surtout la dépendance de la caractéristique du travail de la résistance de charge, et le volume effectif autour du fil.

On a établi les valeurs de la résistance de charge correspondant à un palier optimum.

La largeur du volume effectif est environ deux fois plus grande que le diamètre du fil. En particulier, pour un fil à diamètre de 0,2 mm la largeur du volume effectif est approximativement 0,5 mm.

Dans le cas de deux fils, les maximums de l'efficacité se déplacent en dehors, à cause de leur interaction, mais la largeur du volume sensible ne change pas.



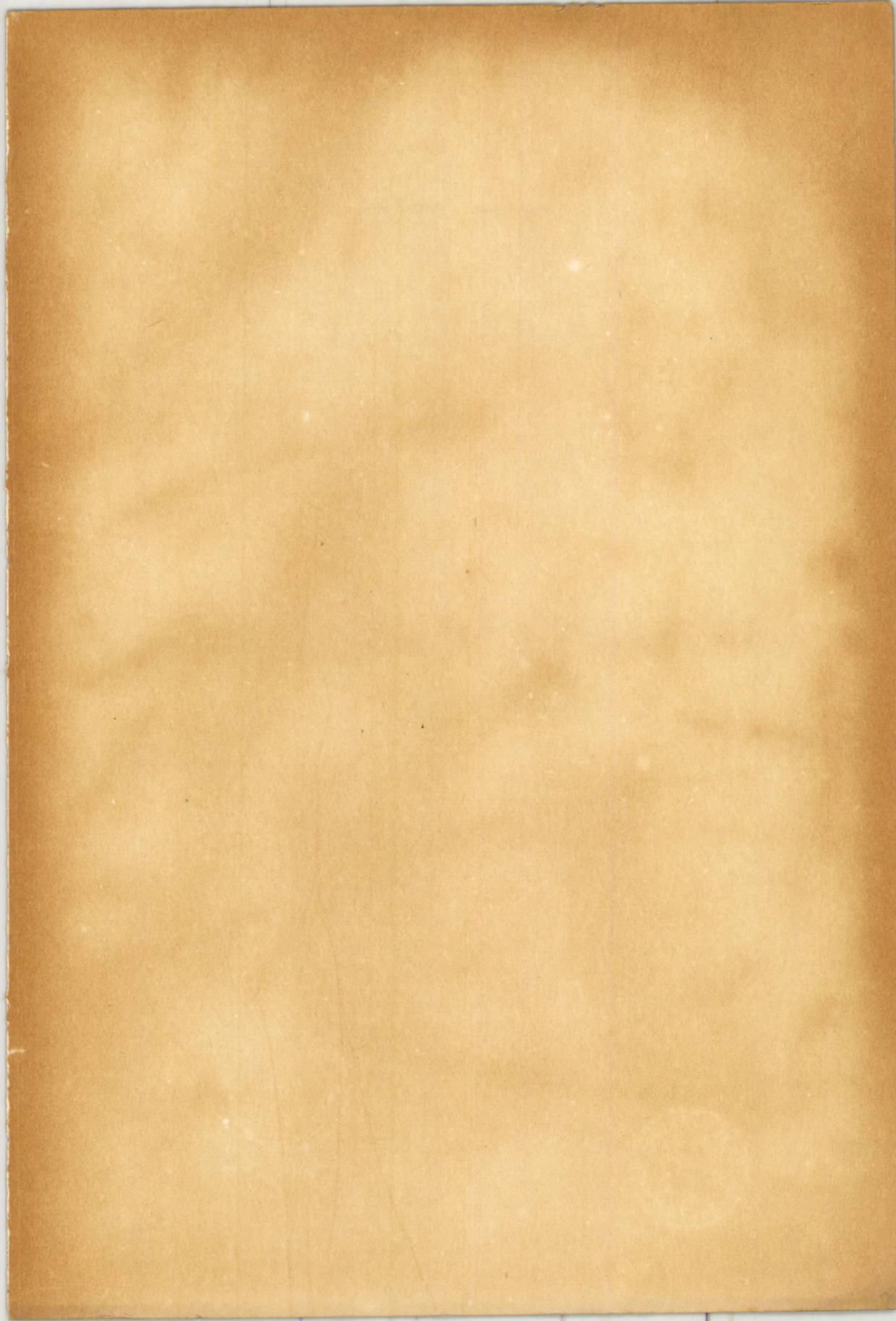
EDITURA ȘTIINȚIFICĂ
Tehnoredactor: Mircea Nasta

*Dat la cules: 19. 02. 1963. Bun de tipar: 30. 05. 1964.
Tiraj: 1000+80 ex. broșate. Apărut: 1964. Hirtie: semi-
velniă, 63 g/m². Format: 70×100/16. Coli editoriale:
21,53. Coli tipar: 22. A: 6631. Indici de clasificare
zecimală: pentru bibliotecile mari: 5(05); pentru bi-
bliotecile mici: 5.*

Tiparul executat sub comanda nr. 4778/1963, la
Întreprinderea poligrafică Cluj, str. Brassai nr. 5—7,
Cluj — R.P.R.



THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
540 EAST 57TH STREET
CHICAGO, ILL. 60637
U.S.A.
1968



01